

# Statystyka i Rachunek Prawdopodobieństwa (Fizyka i Optyka) Lista zadań

Marek Klonowski  
Wrocław 2015/16

## Lista 1

1. Ile jest tablic rejestracyjnych formatu  $LL - CCCC$  ? A ile  $CC - LLLL$  ?
2. Ile jest ciągów bitowych długości 10 ? A ile z nich ma 0 na końcu ?
3. Na ile sposobów można ustawić 3 osoby w kolejce ?
4. Marek posiada 12 różnych książek - 7 z matematyki, 2 o filatelistyce oraz dwa życiorysy - Agnieszki Fitkau-Perepeczko i Justina Bibera.
  - Na ile sposobów może ustawić książki na półce ?
  - Na ile sposobów może ustawić książki jeśli życiorys p. Agnieszki ma być na pierwszym miejscu ?
  - a na ile, jeśli książki z każdej dziedziny (matematyka, życiorysy, filatelistyka) mają być obok siebie ?

Dla ułatwienia przyjmij, że Marek ma półkę.

5. Ile jest słów czteroliterowych nad alfabetem  $\{a, b, d, p, u\}$  ? A takich, które nie kończą się na literę  $a$  ?
6. Czego jest więcej - ludzi na świecie czy ciągów 35 bitowych ?
7. Czego jest więcej - atomów we wszechświecie czy ciągów 200 bitowych ?
8. Na ile sposobów z klasy o 20 chłopcach i 15 dziewczynkach można wybrać delegację złożoną z 2 chłopców i dziewczynki ?
9. TRUDNIEJSZE: Ile jest ciągów 100 bitowych takich, że jest dokładnie 80 jedynek a żadne dwa zera nie stoją obok siebie ?
10. Udowodnij a potem uzasadnij (podaj interpretację kombinatoryczną)

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

11. Co ma wspólnego z pokerem liczba  $\binom{52}{5}$ . Ile jest pokerów ?
12. Przypomnij sobie i uzasadnij prawa de Mograna

## Lista 2

1. Marek ma 12 skarpet (6 par) - wybiera losowo dwie skarpety. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ubierze parę ?
2. Marek ma już tylko 10 skarpet - (4 pary i dwie pojedyncze skarpety) - wybiera losowo dwie skarpety. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ubierze parę ?
3. Rysując odpowiedni diagram Venna uzasadnij, że dla zbiorów  $A, B, C$  zachodzi

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

4. TRUDNIEJSZE: Udowodnij, że

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n.$$

Podaj interpretację.

## Lista 3

1. Dla  $n \geq r$  udowodnij i uzasadnij wzór

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

2. Rzucamy 10 razy monetą. Niech zdarzenia  $A$  oznacza, że w ostatnim rzucie wypadł orzeł a  $B$  że liczba orłów jest parzysta. Czy  $A$  i  $B$  są niezależne ?
3. Rzucam dwa razy kostką. Niech  $S$  oznacza zdarzenie, że suma na obu kostkach jest równa 7 a  $A$  zdarzenie, że na pierwszej kostce jest 3. Czy zdarzenia  $A$  i  $S$  są niezależne ?
4. Wiemy, że 0.0001 procenta ludzi jest zarażonych bakteriami *guzikowca dżemowego*. Na PWR opracowano test na nosicielstwo tej bakterii. Test daje odpowiedź pozytywną w przypadku osoby zarażonej z prawdopodobieństwem 0.99. W przypadku osoby zdrowej wynik jest negatywny też z prawdopodobieństwem 0.99. Pan Duszan, którego uznać można za losowego człowieka, otrzymał pozytywny wynik testu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest nosicielem *guzikowca dżemowego*?  
Co z tego wynika dla praktyki ?  
Czy ten test jest dobry ?  
Czy założenie, że pacjent jest „losowym człowiekiem” jest istotne ?
5. Przedstaw uogólniony wzór Bayesa przy rozbiciu przestrzeni probabilistycznej na zbiory  $B_1, B_2, \dots$
6. Wypiłem kawę. Po wypiciu kawy rzucam monetą. Jak wypadnie orzeł znów wypijam kawę. (I tak rekurencyjnie). Po zakończeniu picia kaw, jeśli wypiłem ich  $k$ , mam migrenę z prawdopodobieństwem  $1/k$ . Dziś migreny nie miałem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypiłem dokładnie 2 kawy ?
7. TRUDNIEJSZE: Rzucam 100 razy monetą. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba wyrzuconych orłów ? (Możesz wykorzystać komputer)
8. Czy zdarzenie  $A$  może być niezależne od samego siebie ?
9. Rzucam 100 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwa:

- wyrzucenia 50 orłów w 50 pierwszych rzutach;
- wyrzucenia dokładnie 50 orłów;
- wyrzucenia samych reszek;
- wyrzucenia co najmniej dwóch reszek.

## Lista 4

1. Rozważmy taką sytuację - rzucam monetą, tak długo aż dostanę orła. Oczywiście możemy przyjąć, że kolejne rzuty są niezależne. Opisz przestrzeń probabilistyczną (zbiór zdarzeń  $\Omega$  oraz funkcję prawdopodobieństwa).
2. Rzucam kostką dwa razy. Niech zdarzenie  $A$  oznacza, że wypadła 6 na obu oczkach; zdarzenie  $B$  że suma oczek jest równa 8 a zdarzenie  $C$  oznacza, że na pierwszej kostce wypadła czwórka. Policz
  - $P(A \cap C)$
  - $P(B \cup C)$
  - $P(B \cap C)$
  - $P(A|C)$
  - $P(C|A)$
  - $P(A|(C \cup B))$
  - $P(A^C \cap C)$
  - $P(A \cup C|B)$
  - $P(A|(C \cup B))$
  - $P(A^C \cap C^C)$
  - $P(A \cup C|A \cap B)$
3. Podaj przykłady par zdarzeń  $A, B$ , takich że  $P(A|B) > P(A)$  oraz  $P(A|B) < P(A)$ .
4. Niech  $A, B$  dwa zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie. Udowodnij, że jeśli  $P(A|B) = P(A)$  to  $P(B|A) = P(B)$ .
5. Pan Duszan zjada na kolację dokładnie  $i$  cukierków z prawdopodobieństwem  $1/2^i$  (dla  $i = 1, 2, \dots$ ). Pan Duszan po zjedzeniu jednego cukierka nie choruje. Gdy zje dwa lub trzy cukierki choruje z prawdopodobieństwem  $1/2$ . Gdy zje więcej niż trzy cukierki to choruje na pewno. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Pan Duszan się rozchoruje? Wiemy, że się rozchorował. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zjadł dokładnie dwa cukierki?
6. O zdarzeniach  $A, B, C$  wiemy, że są niezależne,  $P(A) = P(B) = 0.2$  oraz  $P(C) = 0.1$ . Policz  $P(A \cup B \cup C)$ .
7. O zdarzeniach  $A, B, C$  wiemy, że są niezależne,  $P(A) = P(B) = 0.2$  oraz  $P(C) = 0.7$ . Policz prawdopodobieństwo, że nie zajdzie żadne z tych zdarzeń.
8. Czy zdarzenia rozłączne mogą być niezależne?
9. Wyciągamy ze standardowej talii 52 kart trzy kary. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będą one tego samego koloru?
10. Wyciągamy ze standardowej talii 52 kart trzy kary. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród nich nie ma asa?

11. Na stole są trzy karty - as pik, as trefl oraz królowa pik. Pozostałe 49 kart jest w talii. Ciągnę trzy karty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród nich nie ma asa ?

## Lista 5

1. Niech zmienna losowa  $X$  oznacza liczbę oczek jaką uzyskamy rzucając kostką. Podać rozkład zmiennej losowej  $X$ . Policzyć prawdopodobieństwa  $P(X < 3)$  oraz  $P(X = 5)$ . Naszkicować dystrybuantę  $X$ .
2.  $X, Y$  - niezależne zmienne losowe odpowiadające niezależnym rzutom kostką. Policzyć  $P(X = Y), P(X = Y = 2), P(X > Y), P(X = 2, Y < 3)$ . Uwaga: Niezależność zm. losowych nie została jeszcze zdefiniowana.
3. Rzucam kostką tak długo, aż wyrzucę szóstkę. Niech  $X$  będzie liczbą rzutów które wykonam. Podać rozkład zm. losowej  $X$ . Policzyć  $P(X > 3)$  oraz  $P(X = 14)$ . Jak wygląda dystrybuanta zm. losowej  $X$  ?

## Lista 6

1.  $X_1, X_2$  - dwa niezależne rzuty kostką. Niech  $Y = \min\{X_1, X_2\}$ . Pokazać, że zmienne losowe  $X$  oraz  $Y$  nie są niezależne. Ponadto narysuj dystrybuantę zmiennej losowej  $Y$ .
2. Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości  $-5, -2, 0, 2$  z prawdopodobieństwami odpowiednio  $0.5; 0.3; 0.1; 0.1$ . Narysować dystrybuanty zm. losowych  $X, 2X, 2|X| - 1$  a potem policzyć

- $\Pr[X = -2]$
- $\Pr[|X| = 2]$
- $\Pr[X < 5]$
- $\Pr[2X - 1 < 5]$ .

A po wszystkim jeszcze znaleźć medianę  $X$  oraz kwantyl rzędu  $3/4$ .

3. Czy funkcja  $f(x) = x$  może być dystrybuantą jakiejś zmiennej losowej ?
4. Zmienna losowa  $X$  Funkcja  $f(x) = c$  dla  $x \in [-1, 2]$  oraz  $f(x) = 0$  dla innych  $x$ .
  - Policzyć  $c$
  - Policzyć  $\Pr[X \in (0, 1)]$
  - Policzyć  $\Pr[|X| = 1]$
  - $\Pr[|X| < 1]$
  - Naszkicować, jak zwykle, dystrybuantę.
5.  $X, Y$  - zmienne losowe takie, że  $\Pr[X = 1] = \Pr[X = 0] = \Pr[Y = 1] = \Pr[Y = 0] = 1/2$ . Czy może być

- $\Pr[X + Y = 2] = 0$
- $\Pr[X + Y = 2] = 1/4$
- $\Pr[X + Y = 2] = 1/2$
- $\Pr[X + Y = 2] = 1$

A jak założymy niezależność to może tak być ?

## Lista 7

1. Pokazać, że  $D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
2. Pokazać, że wariancja zm. losowej, o ile istnieje, jest nieujemna.
3. Zmienna losowa ma rozkład jednostajny na przedziale  $[-3, 3]$ . Narysować jej dystrybuantę.
4. Zmienna losowa ma rozkład jednostajny na zbiorze  $\{-1, 0, 1, 2\}$ . Policzyć wartość oczekiwaną i wariancję.
5. Przy każdym podejściu do egzaminu na prawo jazdy udaje mi się niezależnie od poprzednich prób zdać z prawdopodobieństwem  $1/6$ . Niech  $X$  będzie liczbą moich prób. Policzyć  $\Pr[X < 4]$  oraz  $E(X)$ .
6. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny z parametrami  $(2, 3)$ . Korzystając z "tablic" (komputera/Internetu). Policzyć  $\Pr[X > 3.22]$  oraz  $\Pr[X < -1]$ .
7. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład Poissona z parametrem  $\lambda$ . Policzyć jej wariancję oraz wartość średnią (oczekiwaną)

## Lista 8

1. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny o parametrach  $(2, 3)$  zaś  $Y$  ma rozkład normalny o parametrach  $(-10, 3)$ . Zakładając, że  $X$  oraz  $Y$  są niezależne oszacować prawdopodobieństwo, że  $X + Y > 0$ .
2. Zmienna losowa ma rozkład wykładniczy z parametrem 3. Narysować jej dystrybuantę i policzyć prawdopodobieństwo, że jej wartość nie przekroczy 123456789.
3. Ile wynosi mediana (kwantyl rzędu  $1/2$ ) zm. losowej  $X$  o rozkładzie wykładniczym za parametrem  $\delta$ ?
4. Z akwenu pływa 30 ryb zdrowych i 40 niezdrowych. Siedzę z wędką i łowię tak długo aż złowię 10 ryb. Zakładam, że ryby łowię z rozkładu jednostajnego (z tego co w akwenu jeszcze zostało). Niech  $X$  będzie liczbą złowionych ryb zdrowych. Podaj rozkład zm. losowej  $X$ , oszacuj  $\Pr[X < 4]$  i podaj  $E(X)$ . W tym ostatnim przypadku można skorzystać z tablic.