Materiały do wykładów z analizy algorytmów

Funkcje tworzące w analizie algorytmów

Jakub Lemiesz

1 Funkcje tworzące

Definicja 1 (Funkcja tworząca) *Rozważmy ciąg liczb rzeczywistych (lub zespolonych)*

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, \ldots) .$$

Funkcję

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

nazywamy funkcją tworzącą ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *i używamy notacji*

$$[z^n]A(z) = a_n .$$

Na funkcję tworzącą $A(z)$ możemy spojrzeć dwojako: jako szereg formalny i jako funkcję liczb rzeczywistych (lub zespolonych).

Szereg formalny Traktując $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ jako szereg formalny możemy myśleć o $A(z)$ jako o formie wygodnego zapisu ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Nie przypisujemy wówczas zmiennej z żadnej konkretnej wartości, a jej kolejne potęgi służą jedynie wyznaczaniu pozycji elementów ciągu: współczynnik stojący przy z^n odpowiada n-temu elementowi ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Na szeregu formalnym możemy wykonywać manipulacje prowadzące do opisania wybranego problemu, zakładając najczęściej jedynie, że ma dodatni promień zbieżności R, czyli jest zbieżny dla $|z| < R$ i pewnego $R > 0$. Operacjami na szeregach formalnych zajmiemy się w rozdziale 2.

Funkcja Z drugiej strony zauważmy, że szereg formalny wskazuje funkcję zmiennej z, której dziedziną jest zbiór tych $z \in \mathbb{R}$ lub $z \in \mathbb{C}$, dla których ciąg sum częściowych $\left(\sum_{n=0}^{m} a_n z^n\right)_{m=0}^{\infty}$ jest zbieżny. Na $A(z)$ możemy zatem spojrzeć jak na funkcję liczb rzeczywistych (lub zespolonych) przyjmującą dla danego z w obszarze zbieżności szeregu wartości rzeczywiste (lub zespolone). Wówczas badanie jej własności analitycznych, w tym badanie obszaru zbieżności, może posłużyć do pozyskania wiedzy o wartościach elementów ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ albo ich przybliżenia. Tym aspektem zajmiemy się w rozdziale 3.

Przykład 1 *Rozważamy ciąg* $(2^n)_{n=0}^{\infty}$. *Jego funkcją tworzącą jest*

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} 2^n z^n = \sum_{n \geq 0} (2z)^n = \frac{1}{1-2z}.$$

Możemy również użyć zapisu

$$[z^n]\frac{1}{1-2z} = 2^n$$

odpowiadającemu wpisaniu w Wolfram Mathematica lub Wolfram Alpha polecenia

$$\text{SeriesCoefficient}\left[\frac{1}{1-2z}, \{z, 0, n\}\right] .$$

2 Operacje na funkcjach tworzących

Niech $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $B(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ oraz przyjmijmy, że $a_n = b_n = 0$ dla $n < 0$. Wówczas możemy zdefiniować następujące operacje (porównaj Tabela ...)

1. **Right Shift** (RS):
$$zA(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1} = \sum_{n\geq 0} a_{n-1} z^n \ .$$
2. **Left Shift** (LS):
$$\frac{A(z) - a_0 z^0}{z} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} z^n \ .$$
3. **Index Multiply** (IM):
$$A'(z) = \sum_{n\geq 0} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n \ .$$
4. **Index Divide** (ID):
$$\int_0^z A(t)dt = \sum_{n\geq 0} \int_0^z a_n t^n dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_{n-1}}{n} z^n \ .$$
5. **Scaling**:
$$A(\lambda z) = \sum_{n\geq 0} a_n \lambda^n z^n \ .$$
6. **Sum/Difference**:
$$A(z) \pm B(z) = \sum_{n\geq 0} (a_n \pm b_n) z^n \ .$$
7. **Sum/Difference of pairs**:
$$(1 \pm z)A(z) = A(z) \pm zA(z) = \sum_{n\geq 0} (a_n \pm a_{n-1}) z^n \ .$$
8. **Convolution**:
$$A(z)B(z) = \sum_{i\geq 0} a_i z^i \sum_{j\geq 0} b_j z^j = \sum_{i\geq 0, j\geq 0} a_i b_j z^{i+j} = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k} \right) z^n \ .$$
Ostatni równość wynika z grupowania po elementach dla których $i + j = n$.
9. **Partial sum**:
$$\frac{1}{1-z} A(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{0\leq k\leq n} 1 \cdot a_k \right) z^n = \sum_{n\geq 0} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) z^n \ .$$

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
$A(z)$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
RS	0	a_0	a_1	a_2	a_3
LS	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
IM	a_1	$2a_2$	$3a_3$	$4a_4$	$5a_5$
ID	0	a_0	$a_1/2$	$a_2/3$	$a_3/4$

Tabela 1: rezultaty zastosowania wybranych operacji na funkcji $A(z)$.

Przykład 2 *Rozważmy następujące równanie rekurencyjne $a_n = 2a_{n-1} + 1$ dla $n \geq 1$ oraz $a_0 = 1$. Standardowo dla wygody przyjmujemy, że $a_n = 0$ dla $n < 0$. Klasycznym sposobem rozwiązywania tego typu równań jest pomnożenie obu stron przez z^n i posumowaniu po wszystkich wartościach n w celu uzyskania wzoru na funkcję tworzącą ciągu a_n:*

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} 2a_{n-1} z^n + \sum_{n\geq 0} z^n = 2z \sum_{n\geq 0} a_{n-1} z^{n-1} + \frac{1}{1-z} = 2zA(z) + \frac{1}{1-z} \,.$$

Stąd mamy

$$A(z) = \frac{1}{1-z}\frac{1}{1-2z} \,.$$

Zauważmy, że funkcja tworząca $\frac{1}{1-2z}$ odpowiada ciągowi $(2^n)_{n=0}^{\infty}$, a pomnożenie przez czynnik $\frac{1}{1-z}$ odpowiada operacji ***Partial sum***. *Otrzymujemy zatem $a_n = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.*

Technikę rozwiązywania równań rekurencyjnych przedstawioną w powyższym przykładzie można zautomatyzować. Spróbuj udowodnić następujący lemat.

Lemat 1 *Niech $a_0, a_1, \ldots, a_{t-1}$ oraz $c_1, c_2, \ldots, c_t$ będą ustalone i niech*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots c_t a_{n-t} \quad \text{dla} \quad n \geq t \,.$$

Wówczas $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ można zapisać jako funkcję wymierną, tzn.

$$A(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \,,$$

gdzie $f(z)$ i $g(z)$ są wielomianami zmiennej z:

$$g(z) = 1 - c_1 z - c_2 z^2 - \ldots - c_t z^t$$

oraz

$$f(z) = g(z) \sum_{0\leq n<t} a_n z^n \pmod{z^t} \,.$$

Dowód. Zostawiamy jako ćwiczenie. Wskazówka: pomnóż obie strony równania rekurencyjnego przez z^n i posumuj po wartościach $n \geq t$. W razie problemów zajrzyj do książki [2] na stronę 104. ∎

Przykład 3 *Rozważmy następujące równanie rekurencyjne $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-3}$ dla $n > 2$ oraz $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1$. W oparciu o Lemat 1 mamy*

$$g(z) = 1 - 2z + 1z^2 - 2z^3 = (1+z^2)(1-2z) \,,$$

$$f(z) = (1+z^2)(z-2z)(1z^0 + 0z^1 - 1z^2) \pmod{z^3} = (1-z^4)(1-2z) \pmod{z^3} = 1-2z,$$

$$A(z) = \frac{1-2z}{(1-2z)(1+z^2)} = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-iz} + \frac{1}{1+iz}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}(iz)^n + \sum_{n\geq 0}(-iz)^n\right) \,.$$

Ponieważ $i^2 = -1$ oraz $i^4 = 1$ mamy

$$a_n = \frac{1}{2}\left(i^n + (-i)^n\right) = \begin{cases} 0 & \textit{dla } 2 \nmid n, \\ -1 & \textit{dla } 2 \mid n \,\wedge\, 4 \nmid n, \\ 1 & \textit{dla } 4 \mid n. \end{cases}$$

Przykład 4 *Rozważmy takie samo równanie rekurencyjne jak w poprzednim przykładzie, ale z innymi warunkami początkowymi:* $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$. *Zauważmy, że* $g(z)$ *jest takie samo jak w poprzednim przykładzie oraz, że*

$$f(z) = (1 + z^2)(1 - 2z)(1z^0 + 2z^1 + 3z^2) \pmod{z^3} = 1 ,$$

$$A(z) = \frac{1}{(1 + z^2)(1 - 2z)} = \frac{\frac{4}{5}}{1 - 2z} + \frac{\frac{1}{10} + \frac{i}{5}}{1 + iz} + \frac{\frac{1}{10} - \frac{i}{5}}{1 - iz} .$$

Powyższa funkcja ma punkty osobliwe w $z = \frac{1}{2}$ *,* $z = i$ *oraz* $z = -i$. *Kluczowa dla wartości* a_n *jest osobliwość w punkcie* $z = \frac{1}{2}$. *Jest to związane z faktem, iż leży ona najbliżej początku układu współrzędnych. Podobnie jak w poprzednim przykładzie pozostałe dwie osobliwości w punktach* $z = i$ *i* $z = -i$ *wprowadzają jedynie niewielkie oscylacje w wartościach* a_n. *Stąd mamy*

$$a_n \approx \frac{4}{5} 2^n .$$

Możesz to sprawdzić porównując wartości z powyższej formuły z wynikami uzyskanymi w Wolfram Aplha dla polecenia

$$\text{Table[SeriesCoefficient[}\frac{1}{((1 - 2z)(1 + z^2))}, \{z, 0, n\}], \{n, 1, 10\}]$$

Mamy zatem następującą **procedurę rozwiązywania liniowych równań rekurencyjnych**.

1. W oparciu o Lemat 1 wyznacz wielomiany $g(z)$ i $f(z)$ oraz funkcję wymierną $A(z) = f(z)/g(z)$.
2. Rozłóż $A(z)$ na ułamki proste postaci $\frac{c}{(1-\alpha z)^j}$.
3. Wykorzystaj fakt, że

$$[z^n](1 - \alpha z)^{-j} = \binom{n + j - 1}{j - 1} \alpha^n . \tag{1}$$

Dowiedzenie równania (1) pozostawiamy jako ćwiczenie. Wskazówka: na funkcji $\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$ zastosuj operację **Scaling** oraz $j - 1$ razy operację **Index Multiply**.

3 Niewymierne funkcje tworzące

Jeśli rozpatrywana funkcja tworząca $A(z)$ nie jest wymierna, uzyskanie informacji o elementach ciągu $(a_n)_{n=0^\infty}$ może być nieco trudniejsze. W niektórych przypadkach można spróbować wykorzystać przedstawione w poprzednim rozdziale operacje na funkcjach tworzących.

Przykład 5 *Rozważmy funkcję tworzącą* $A(z) = \frac{1}{1-z} \ln \frac{1}{1-z}$. *Zauważmy, że funkcji tworzącej* $1/(1 - z)$ *odpowiada ciąg* $(1, 1, 1, \ldots)$. *Stosując na tej funkcji operację* ***Index Divide*** *otrzymujemy funkcję*

$$\int_0^z \frac{1}{1 - t} dt = \ln \frac{1}{1 - z}$$

odpowiadającą ciągowi $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$. *Przemnożenie funkcji* $\ln \frac{1}{1-z}$ *przez* $\frac{1}{1-z}$ *możemy rozumieć jako wykonanie operacji* ***Partial sum***, *zatem funkcji* $A(z)$ *odpowiada ciąg* $(H_n)_{n=0}^{\infty}$, *gdzie* H_n *jest* n*-tą liczbą harmoniczną:*

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) , \tag{2}$$

a $\gamma \approx 0.577\ldots$ *oznacza stałą Eulera.*

W ogólnym przypadku, żeby uzyskać informację o elementach ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ związanego z funkcją tworzącą $A(z)$ możemy spróbować wykorzystać na przykład rozwinięcie w szereg Taylora, poniższy łatwy do udowodnienia lemat (ćwiczenie) lub jedno z wielu twierdzeń wykorzystujących informację o punktach osobliwych $A(z)$ (zobacz Twierdzenie 1 poniżej).

Lemat 2 *Jeśli $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ma promień zbieżności $R > 0$, to*

$$(\forall r \in (0, R)) \left(a_n = \mathcal{O}\left(r^{-n}\right)\right) .$$

Dowód. Wskazówka: zauważ, że dla $r \in (0, R)$ wyrazy $a_n r^n$ muszą zbiegać do zera. ■

Przykład 6 *Liczby Catalana można zdefiniować rekurencyjnie jako*

$$c_0 = 1 \quad \text{oraz} \quad c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\, c_{n-i-1} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Następnie wykorzystując operacje ***Convolution*** *oraz* ***Right Shift*** *możemy pokazać, że funkcja tworząca dla tego ciągu spełnia zależność $C(z) = 1 + zC(z)^2$. Rozwiązują uzyskane równanie kwadratowe otrzymujemy, dwa rozwiązania, a weryfikując warunek początkowy $\lim_{z\to 0} C(z) = c_0 = 1$ otrzymujemy, funkcję tworzącą dla ciągu:*

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} . \tag{3}$$

W oparciu o Lemat 2 dla $r = 1/(4 + \epsilon)$ i $\epsilon > 0$ mamy $c_n = \mathcal{O}\left((4 + \epsilon)^n\right)$.

Oznaczmy przez $a_n \sim b_n$, fakt że

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1 .$$

Wówczas można udowodnić następujące twierdzenie (zobacz [1], ang. transfer theorems).

Twierdzenie 1 *Niech $f(z)$ ma promień zbieżności $R > \delta$ oraz niech $f(\delta) \neq 0$. Wówczas dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ mamy*

$$[z^n]\frac{f(z)}{(1 - z/\delta)^\alpha} \sim \frac{\delta^{-n} f(\delta) n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ,$$

gdzie $\Gamma(x)$ oznacza funkcję gamma.

Ćwiczenie 1 *Wykorzystaj powyższe twierdzenie, aby w oparciu o formułę (3) uzyskać asymptotyczne przybliżenie dla liczb Catalana*

$$c_n \sim \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}} .$$

Ćwiczenie 2 *Wykorzystując uogólnienie symbolu Newtona na liczby rzeczywiste pokaż, że:*

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} .$$

4 Analiza QuickSort

Na poniższym listingu znajduje się pseudo-kod algorytmu QuickSort. Algorytm przyjmuje na wejściu tablicę $\mathbf{T}$ oraz wskaźniki $\mathbf{left}$ i $\mathbf{right}$ wskazujące początek i koniec fragmentu tablicy $\mathbf{T}$, który ma być posortowany. Dla uproszczenia zakładamy, że elementy sortowanej tablicy są różne i każda ich permutacja na wejściu jest tak samo prawdopodobna.

Wybieramy $\mathbf{pivotIndex} \leftarrow \mathbf{left}$ jako wskaźnik do piwotu według którego uporządkujemy tablicę, tak by do dwóch różnych cześć trafiły elementy mniejsze i większe od piwotu, zgodnie z następującym schematem:

x<pivot	pivot	x>pivot

Zakładamy, że podprocedura **partition** wykonuje powyższy podział na tablicy $\mathbf{T}$ długości n za pomocą $n+1$ porównań i zwraca wskaźnik do nowej pozycji piwotu $\mathbf{pivotNewIndex}$.

QuickSort

```
QS(T, left, right)
if left < right then
    pivotIndex ← left
    pivotNewIndex ← partition(T, left, right, pivotIndex)
    QS(T, left, pivotNewIndex − 1)
    QS(T, pivotNewIndex + 1, right)
end if
```

Piwot dzieli tablicę T na dwie podtablice rozmiaru k oraz $n-k-1$ dla $k \in \{0, \ldots n-1\}$. Zauważmy, że każdy podział ma takie samo prawdopodobieństwo $1/n$, gdyż każdy element ma taką samą szanse na bycie piwotem (zakładamy losową permutację elementów na wejściu). Następnie algorytm jest rekurencyjnie wywoływany na otrzymanych podtablicach.

Interesuje nas **łączna średnia liczba porównań** wykonywana w ramach całego algorytmu. Przyjmując, że Q_n oznacza łączną średnią liczbę porównań dla tablicy wejściowej rozmiaru n otrzymujemy następujące równanie rekurencyjne:

$$Q_n = (n+1) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(Q_k + Q_{n-k-1}) \quad \text{dla} \quad n \geq 2 \tag{4}$$

oraz $Q_0 = Q_1 = 0$. Równanie (4) można równoważnie zapisać jako

$$nQ_n = n(n+1) + 2\sum_{k=1}^{n} Q_{k-1}\,.$$

Wykorzystajmy funkcje tworzące do rozwiązania tego równania. Mnożąc obie strony przez z^n i sumując po n otrzymujemy

$$\sum_{n\geq 0} nQ_n z^n = \sum_{n\geq 0} n(n+1)z^n + 2\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=1}^{n} Q_{k-1}\right) z^n\,.$$

Nich $Q(z)$ oznacza funkcję tworzącą ciągu Q_n. Stosując operację **Index Multiply** i **Right shift** otrzymujemy

$$\sum_{n\geq 0} nQ_n z^n = zQ'(z)$$

oraz

$$\sum_{n\geq 0} n(n+1)z^n = \frac{2z}{(1-z)^3}\,.$$

Wykorzystując operacje **Partial sum** oraz **Right shift** otrzymujemy

$$2\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=1}^{n} Q_{k-1}\right) z^n = \frac{2}{1-z} zQ(z)\,.$$

Ostatecznie, upraszczając czynnik z, otrzymujemy równanie:

$$Q'(z) - 2\frac{Q(z)}{1-z} = \frac{2}{(1-z)^3}\ .$$

Jest to równanie różniczkowe pierwszego rzędu postaci $Q'(z) + A(z)Q(z) = B(z)$, gdzie $A(z)$ oraz $B(z)$ są dane. Możemy je łatwo rozwiać np. metodą czynnika całkującego:

$$Q(z) = e^{-\int_0^z A(x)dx} \int B(z)e^{\int_0^z A(x)dx} dz$$

Podstawiając formuły $A(x)$ oraz $B(z)$ otrzymujemy:

$$Q(z) = \frac{2}{(1-z)^2} \ln \frac{1}{1-z}\ .$$

Z Przykładu 5 wiemy, że funkcja tworząca $H(z) = \frac{1}{1-z} \ln \frac{1}{1-z}$ odpowiada ciągowi liczb harmonicznych $(H_n)_{n=0}^{\infty}$. Zauważmy, że stosując na $H(z)$ operację **Index Multiply** otrzymujemy funkcję tworzącą

$$H'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}\left(\ln \frac{1}{1-z} + 1\right) = \frac{1}{2}Q(z) + \frac{1}{(1-z)^2}$$

odpowiadającą ciągowi liczb $((n+1)H_{n+1})_{n=0}^{\infty}$. Mamy zatem

$$Q(z) = 2\left(H'(z) - \frac{1}{(1-z)^2}\right)\ .$$

Ponieważ funkcja tworząca $\frac{1}{(1-z)^2}$ odpowiada ciągowi $(n+1)_{n=0}^{\infty}$ otrzymujemy

$$Q_n = 2\left((n+1)H_{n+1} - (n+1)\right)\ .$$

Wykorzystując formułę asymptotyczną na H_n podaną w równaniu (2) mamy

$$Q_{n-1} = 2n\left(\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right)$$

i ostatecznie

$$Q_{n-1} = 2n \ln n + 2n(\gamma - 1) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\ .$$

Literatura

[1] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, USA, 1 edition, 2009.

[2] R. Sedgewick and P. Flajolet. *An Introduction to the Analysis of Algorithms (2nd edition)*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., USA, 2013.