Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój
Politechnika Wrocławska
Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

„ZPR PWr – Zintegrowany Program Rozwoju Politechniki Wrocławskiej”

Materiały do wykładów z analizy algorytmów

Algorytmy wyboru lidera

Jakub Lemiesz

1 Problem wyboru lidera

Rozważmy system rozproszony składający się z wielu równoprawnych węzłów. W tego typu systemach często zachodzi potrzeba wyznaczenia jednego z węzłów na tymczasowego lidera, który np. uzyska wyłączny dostęp do wspólnego kanału komunikacyjnego. Problem wyboru lidera wiąże się z pytaniem, w jaki sposób należy zorganizować proces wyboru, by po jego zakończeniu każdy węzeł miał informację, czy jest liderem, a jeśli nie to, czy inny węzeł został liderem. W pewnych scenariuszach węzły powinny również poznać tożsamość lidera. Oczywiście wymagane jest, by po zakończeniu procesu panował konsensu. W szczególności niedopuszczane jest by dwa różne węzły uważały się lub były uważane przez inne węzły za liderów.

Łamanie symetrii

Ponieważ zakładamy, że węzły są równoprawne, wybór lidera wymaga procedury, która w pewien sposób wyróżni jeden z węzłów. Dla przykładu, jeśli każdy węzły ma unikalny identyfikator i na zbiorze identyfikatorów można określić porządek liniowy, moglibyśmy wybierać na lidera węzeł o najmniejszym identyfikatorze. Takie założenie jednak nie zawsze musi być prawdziwe. W praktyce do łamania symetrii między węzłami często wykorzystuje się pseudo-losowość, np. węzły mogą generować losowe identyfikatory na potrzeby algorytmu.

Model komunikacji

Problem wyboru lidera pojawia się w wielu różnych scenariuszach i w związku z tym przyjmuje się różne modele komunikacji między węzłami. Dla przykładu, możemy rozważać różne topologie sieci: graf pełny, graf liniowy, siatkę i pierścień, grafy skierowane i nieskierowane. Liczba węzłów może być znana lub nie. Inne modele rozważa się jeśli komunikacja odbywa się np. bezprzewodowo w sieciach radiowych, a inne kiedy rozpatruje się konkurujące o zasoby procesy uruchomione na jednej maszynie.

W wielu scenariuszach, projektując algorytmy wyboru lider, należy minimalizować nie tylko czas ich działania, ale również ilość przesyłanych danych. Duże nakłady komunikacyjne są zazwyczaj związane z dużym wydatkiem energetycznym, co w przypadku urządzeń bezprzewodowych zasilanych bateriami jest kwestią zasadniczą.

Wybór lidera w sieci radiowej

Rozważmy model sieci radiowej, w której każda para węzłów może się bezpośrednio komunikować (ang. single-hop model). Będziemy również zakładać, że wszystkie urządzenia mają synchronizowane zegary oraz, że czas jest podzielony na krótkie odcinki (sloty) równej długości. Przyjmujemy, że każdy węzeł może rozpoznać, które z trzech zdarzeń nastąpiło w danym slocie:

1. NULL — żaden z węzłów nie nadawał,
2. SINGLE — dokładnie jeden węzeł nadawał,
3. COLLISION — nadawały więcej niż dwa węzły.

N	N	S	C	N	N	C	C	C	S	N	N

$\longrightarrow$

czas

Rysunek 1: Podział czasu na sloty. W każdym slocie następuje jedno z trzech zdarzeń.

Powyżej opisany model jest często nazywamy modelem sieci radiowej z wykrywaniem kolizji. Rozważmy dla tego modelu trzy scenariusze, biorące pod uwagę, czy znana jest liczba węzłów i czy węzły mają unikalne identyfikatory.

2 Scenariusz pierwszy

Przyjmijmy, że znana jest liczba węzłów n oraz, że każdy węzeł ma unikalny identyfikator. Przyjmiemy również, że wszystkie identyfikatory są liczbami naturalnymi z pewnego zakresu:

$$id_1, id_2, \ldots, id_n \in [1, 2, \ldots m],\ m \geq n\ .$$

Deterministyczny algorytm wyboru lidera polegający na wyborze węzła o najmniejszym identyfikatorze możemy zrealizować w następujący sposób. Węzeł o identyfikatorze id_i ogłasza swoje istnienie nadając sygnał w przeznaczonym dla niego slocie o numerze id_i. Liderem zostaje węzeł, który nadał swój sygnał jako pierwszy. Zauważmy, że w takim algorytmie liczba slotów potrzebnych do wyboru lidera zależy od wartości m i tego jakie identyfikatory są obecne w systemie. Wartość m może być bardzo duża.

3 Scenariusz drugi

Przyjmijmy, że liczba węzłów $n \geq 2$ jest znana, ale do łamania symetrii zamiast identyfikatorów wykorzystamy pseudo-losowość. Przyjmijmy również, że węzły są nierozróżnialne i każdy decyduje się nadać sygnał w slocie o numerze i z prawdopodobieństwem p_i. Naszym celem jest dobranie takich wartości prawdopodobieństw p_i by możliwe szybko pojawił się slot typu SINGLE, w którym nada dokładnie jeden węzeł. Wówczas procedura jest przerywana, a węzeł który nadał w tym slocie zostaje wybrany liderem.

Lemat 1 *Wybór $p_i = 1/n$ maksymalizuje prawdopodobieństwo wyboru lidera w i-tym slocie.*

Dowód. Niech X_i będzie zmienną losową oznaczającą liczbę węzłów, które zdecydowały się nadawać w slocie i-tym. Zauważmy, że

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \binom{n}{1} p_i (1 - p_i)^{n-1}$$

ma największą wartość dla $p_i = 1/n$ (ćwiczenie). ∎

Lemat 2 *Niech $p_i = 1/n$ dla wszystkich i oraz niech L będzie zmienną losową oznaczającą liczbę slotów potrzebnych do zakończenia procedury. Wówczas $\mathbb{E}(L) < e$.*

Dowód. Stosując oznaczenia z Lematu 1 zauważmy, że dla $p_i = 1/n$ mamy

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} > e^{-1}\ .$$

Zauważmy również, że zmienna losowa L ma rozkład geometryczny $Geo(q)$, gdzie prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie to $q = \mathbb{P}(X_i = 1) > e^{-1}$. Ponieważ dla zmiennej o rozkładzie geometrycznym $G \sim Geo(q)$ mamy $\mathbb{E}(G) = 1/q$, zatem $\mathbb{E}(L) < e$. ∎

Lemat 3 *Niech S_t oznacza zdarzenie, że procedura wyboru lidera kończy się w $t \geq 1$ początkowych slotach. Wówczas $\mathbb{P}(S_t) \geq 1 - e^{-t/e}$.*

Dowód. Niech F_t oznacza zdarzenie, że w żądnym z t początkowych slotów nie uda się wybrać lidera. Stosując oznaczenia z Lematu 2 mamy

$$\mathbb{P}(F_t) = (1-q)^t < (1-e^{-1})^t \leq e^{-t/e} .$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności Bernoulliego (ćwiczenie)

$$1 + x \leq e^x \quad \text{dla} \quad x \geq -1 .$$

■

Z Lematu 3 możemy m.in. wydedukować, że zaproponowana procedura wyboru lidera zakończy się w $t = \lceil e \ln n \rceil$ slotach z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}(S_t) \geq 1 - \frac{1}{n}$.

4 Scenariusz trzeci

Rozważmy teraz scenariusz, w którym liczba węzłów n nie jest znana. Przyjmujemy jedynie, że $n \leq u$, gdzie u jest dowolnym górnym ograniczeniem na liczbę węzłów. Podobnie jak w scenariuszu drugim przyjmujemy również, że węzły są nierozróżnialne i każdy decyduje się nadać sygnał w slocie o numerze i z prawdopodobieństwem p_i. Naszym celem jest dobranie takich wartości prawdopodobieństw p_i by możliwe szybko pojawił się slot SINGLE. Węzeł który nadał w tym slocie zostaje wybrany liderem.

Poniżej prezentujemy algorytm, który z dużym prawdopodobieństwem umożliwia wybór lidera w $\mathcal{O}(\log u)$ slotach. Wynik ten można rozumieć jako ograniczenie górne dla algorytmu optymalnego dla rozważnego scenariusza. W dalszej części przedstawimy ograniczenie dolne – pokażemy, że nie istnieje algorytm, który umożliwiałby wybór lidera z dużym prawdopodobieństwem w istotnie mniejszej liczbie slotów.

Ograniczenie górne

Podzielmy czas na rundy i niech każda runda składa się z $L = \lceil \log_2(u) \rceil$ kolejnych slotów. W i-tym slocie każdej rundy każdy węzeł niezależnie od innych decyduję się nadawać z prawdopodobieństwem $p_i = (1/2)^i$ dla $i = 1, \ldots, L$. Niech

$$P_i(n) = np_i(1-p_i)^{n-1}$$

oznacza prawdopodobieństwo, że w i-tym slocie nada dokładnie jeden węzeł, jeśli w systemie jest n węzłów. Niech $S_{L,n}$ oznacza zdarzenie, że w jednej rundzie długości L udało się wybrać lidera (pojawił się slot typu SINGLE) jeśli w systemie jest n węzłów. Zauważmy, że

$$\mathbb{P}(S_{L,n}) = 1 - \prod_{i=1}^{L} (1 - P_i(n)) .$$

Twierdzenie 1 *Dla $L = \lceil \log_2(u) \rceil$ i dowolnego $n \in \{2, \ldots, u\}$ zachodzi nierówność:*

$$\mathbb{P}(S_{L,n}) \geq 1 - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-1/2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-1/4}\right) .$$

Dowód.

Wprowadźmy oznaczenie $\lambda = 1 - \frac{3}{4}(1 - \frac{1}{2}e^{-1/2})(1 - \frac{1}{4}e^{-1/4})$ i zauważmy, że $\lambda \approx 0.579$. Ustalmy $n \in \{2, \ldots, u\}$ i rozważmy dwa przypadki:

Przypadek 1: jeśli $n = 2$ mamy

$$\mathbb{P}(S_{L,2}) \geq 1 - (1 - P_1(2)) \cdot (1 - P_2(2)) = 1 - \frac{5}{16} = 0.6875 > \lambda .$$

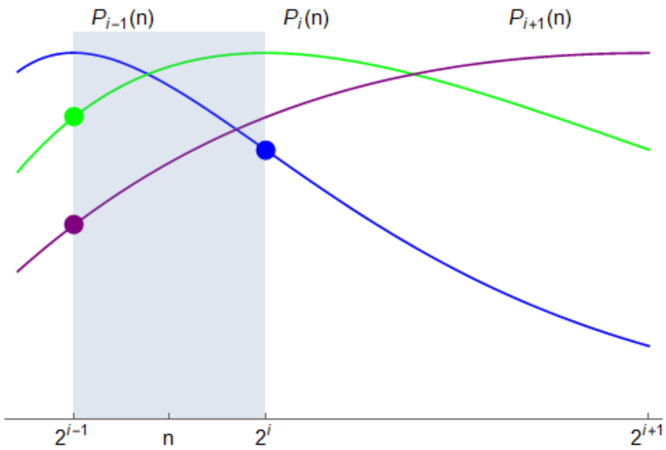
Przypadek 2: jeśli $n \in \{3, 4, \dots, u\}$ to istnieje takie $i \in \{2, 3, \dots, L\}$, że

$$2^{i-1} < n \leq 2^i \,.$$

Zauważmy, że funkcja $P_i(n) = np_i(1-p_i)^{n-1}$ jest unimodalna dla $i \geq 1$ i ma maksimum w punkcie (ćwiczenie)

$$n^* = -\left(\ln\left(1-p_i\right)\right)^{-1} \approx 2^i \,.$$

Minimum funkcji $P_i(n)$ na przedziale $(2^{i-1}, 2^i]$ jest zatem osiągane na jednym z krańców tego przedziału (zobacz Rysunek 1).



Rysunek 1: Prawdopodobieństwa sukcesu w slotach $i-1, i, i+1$ w zależności od liczby węzłów. Rozpatrujemy wartości na krańcach przedziału $(2^{i-1}, 2^i]$ do którego należy faktyczna liczba węzłów n.

Aby rozstrzygnąć na którym krańcu przedziału osiągane jest minimum wprowadźmy oznaczenia

$$l_j(i) = P_j(2^{i-1}) \;\;,\;\; r_j(i) = P_j(2^i)$$

dla $j = i-1, i, i+1$. Wykorzystując nierówność $(1-1/x)^x \leq 1/e$ możemy pokazać, że

$$\frac{r_{i-1}(i)}{l_{i-1}(i)} = 2\left(1 - 2^{-(i-1)}\right)^{2^{i-1}} \leq \frac{2}{e} < 1 \,.$$

Zauważmy również, że

$$\frac{l_i(i)}{r_i(i)} = \frac{1}{2}\left(1-2^{-i}\right)^{2^i(-1/2)} \,, \qquad \frac{l_{i+1}(i)}{r_{i+1}(i)} = \frac{1}{4}\left(1-2^{-i}\right)^{2^i(-1/4)}$$

oraz, że obie powyższe funkcje są malejące i osiągają największą wartość na rozpatrywanym zbiorze dla $i = 2$. Dla $i \geq 2$ mamy zatem

$$\frac{l_i(i)}{r_i(i)} \leq 8/9 < 1 \,, \;\; \frac{l_{i+1}(i)}{r_{i+1}(i)} \leq 32/49 < 1 \,.$$

Z powyższych rozważań wynika, że minimum każdej z funkcji $P_{i-1}(n)$, $P_i(n)$, $P_{i+1}(n)$ na przedziale $2^{i-1} < n \leq 2^i$ leży odpowiednio w punktach 2^i, 2^{i-1}, 2^{i-1}. Minima te przyjmują zatem wartości $P_{i-1}(2^i)$, $P_i(2^{i-1})$ oraz $P_{i+1}(2^{i-1})$ lub równoważnie $r_{i-1}(i)$, $l_i(i)$ oraz $l_{i+1}(i)$.

Zauważmy następnie, że funkcje $l_x(x), l_{x+1}(x)$ są malejące a funkcja $r_{x-1}(x)$ jest rosnąca dla $x \geq 2$. Można to zweryfikować badając znak pochodnej (ćwiczenie). Co więcej mamy

$$\lim_{x\to\infty} l_x(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\left(1-2^{-x}\right)^{2^{x-1}-1} = \frac{1}{2}e^{-1/2} \,,$$

zatem dla $x \geq 2$ mamy $l_x(x) > (1/2)e^{-1/2}$. Stąd dla $i \geq 2$ oraz $n \in (2^{i-1}, 2^i]$ mamy $P_i(n) > (1/2)e^{-1/2}$. Podobnie

$$\lim_{x\to\infty} l_{x+1}(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}}, \qquad r_{x-1}(x) \geq \frac{1}{4} \quad \text{dla} \quad x \geq 2\,,$$

zatem dla $i \geq 2$ oraz $n \in (2^{i-1}, 2^i]$ mamy $P_{i-1}(n) \geq \frac{1}{4}$ oraz $P_{i+1}(n) > \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}}$.

Na koniec zauważmy, że

$$\mathbb{P}\left(S_{L,n}\right) \geq 1 - (1 - P_{i-1}(n))(1 - P_i(n))(1 - P_{i+1}(n))$$

dla $2 \leq i \leq L$ oraz $0 \leq P_j(n) \leq 1$. To spostrzeżenie w połączeniu z uzyskanymi powyżej nierównościami kończą dowód. ■

Zauważmy, że jeśli $n = 1$ to dołączenie jednego slotu w którym prawdopodobienstwem nadawania jest równe $p = 1$ gwarantuje wybór lidera. Z Twierdzenia 1 wynika zatem, że dla $n \geq 1$ możemy wybrać lidera z prawdopodobieństwem co najmniej równym

$$\lambda = 1 - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-1/2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-1/4}\right) \approx 0.579$$

w $\lceil \log_2 u \rceil$ + 1 slotach.

Załóżmy jednak, że pragniemy uzyskać gwarancję wyboru lidera z prawdopodobieństwem co najmniej $1 - \frac{1}{f}$ dla pewnego ustalanego $f > 1$. Pokażemy dalej, że można osiągnąć ten cel wykonując odpowiednią liczbę rund algorytmu, w każdej rundzie wykorzystując tą samą co dotychczas sekwencje prawdopodobieństw nadawania $\left(\frac{1}{2^i}\right)_{i=1,\ldots,L}$. Wykorzystamy następujący lemat.

Lemat 4 *Niech $f \geq 1$, niech S będzie zdarzeniem takim, że $\mathbb{P}(S) \geq \lambda > 0$ oraz niech $S_1, \ldots, S_m$ będą niezależnym kopiami S. Wówczas*

$$\left(m \geq \frac{\ln f}{\ln \frac{1}{1-\lambda}}\right) \longrightarrow \mathbb{P}\left(S_1 \cup \ldots \cup S_m\right) \geq 1 - \frac{1}{f}\,.$$

Dowód. Zauważmy, że $\mathbb{P}\left(S_1 \cup \ldots \cup S_m\right) = 1 - (1 - \mathbb{P}(S))^m$ oraz, że stwierdzenia

$$\mathbb{P}\left(S_1 \cup \ldots \cup S_m\right) \geq 1 - \frac{1}{f}$$

i

$$(1 - \mathbb{P}(S))^m \leq \frac{1}{f}$$

są równoważne. Zauważmy również, że

$$(1 - \mathbb{P}(S))^m \leq \frac{1}{f} \iff m\ln(1 - \mathbb{P}(S)) \leq \ln\frac{1}{f} \iff m \geq \frac{\ln f}{\ln \frac{1}{1-\mathbb{P}(S)}}\,.$$

Funkcja $f(x) = \ln(1/(1-x))$ jest rosnąca na przedziale $(0, 1)$, zatem z założenia $\mathbb{P}(S) \geq \lambda$ mamy

$$\frac{1}{\ln \frac{1}{1-\mathbb{P}(S)}} \leq \frac{1}{\ln \frac{1}{1-\lambda}}\,.$$

Zatem jeśli $m \geq \frac{\ln f}{\ln \frac{1}{1-\lambda}}$ to również $m \geq \frac{\ln f}{\ln \frac{1}{1-\mathbb{P}(S)}}$, co kończy dowód lematu. ■

Z Lematu 4 wynika, że dla $1 \leq n \leq u$ łączna liczba slotów, która gwarantuje, że rozważany algorytm wybierze lidera z prawdopodobieństwem co najmniej $1 - \frac{1}{f}$ to

$$\left\lceil \frac{\ln f}{\ln \frac{1}{1-\lambda}} \right\rceil \cdot \lceil \log_2 u \rceil + 1 \approx 1.1553 \cdot \ln f \cdot \lceil \log_2 u \rceil\,.$$

Ograniczenie dolne

Pokażemy teraz, że dla rozważanego scenariusza, gdy znane jest górne ograniczenie u na liczbę węzłów nie istnieje algorytm, który umożliwiałby wybór lidera z dużym prawdopodobieństwem w liczbie slotów istotnie mniejszej od $\log_2 u$.

Niech $\vec{p} = (p_i)_{i=1,\ldots,k}$ będzie dowolnym wektorem prawdopodobieństw długości k i niech każdy węzeł nadaje w slocie i niezależnie od innych węzłów z prawdopodobienstwem p_i. Niech $S_{\vec{p},n}$ oznacza zdarzenie, że udało się wybrać lidera w jednym ze slotów (pojawił się slot typu SINGLE) jeśli każdy z n węzłów nadaje zgodnie z wektorem $\vec{p}$.

Lemat 5 *Rozważmy wektor prawdopodobieństw $\vec{p} = (p_i)_{i=1,\ldots,k}$ i niech $\vec{q} = (q_i)_{i=1,\ldots,k}$ dla*

$$q_i = \max\{p_i, \frac{1}{u}\} .$$

Wówczas

$$(\forall n \in \{1, \ldots, u\})(\mathbb{P}(S_{\vec{p},n}) \leq \mathbb{P}(S_{\vec{q},n})) .$$

Dowód. Ustalmy $n \geq 1$ i rozważmy prawdopodobieństwo sukcesu w jednym slocie

$$f_n(p) = np(1-p)^{n-1} .$$

Funkcja f_n jest unimodalna i osiąga maksimum w punkcie $p = 1/n$. Stąd jeśli $n \leq u \leq \frac{1}{p}$ to

$$f_n(p) \leq f_n(1/u) .$$

■

W oparciu o Lemat 5 możemy przyjąć, że $p_i \geq \frac{1}{u}$ dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, k\}$. Dodatkowo bez starty ogólności możemy założyć, że

$$p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_k .$$

Dla wygody zapisu przyjmijmy również oznaczenia $p_0 = 1$ oraz $p_{k+1} = 1/u$.

Lemat 6 *Istnieje $i \in \{0, \ldots, k\}$ takie, że*

$$\frac{p_i}{p_{i+1}} \geq u^{\frac{1}{k+1}} .$$

Dowód. Załóżmy, że $p_0/p_1 < u^{1/(k+1)}$, $p_1/p_2 < u^{1/(k+1)}$, ..., $p_k/p_{k+1} < u^{1/(k+1)}$. Wówczas

$$u = \frac{p_0}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdots \frac{p_k}{p_{k+1}} < u^{\frac{k+1}{k+1}} = u .$$

Sprzeczność. ■

Twierdzenie 2 *Dla dowodnego wektora prawdopodobieństw $\vec{p} = (p_i)_{i=1,\ldots,k}$ długości k istnieje $n \in \{1, \ldots, u\}$ takie, że*

$$\mathbb{P}(S_{\vec{p},n}) \leq 1 - \left(1 - \frac{3e}{u^{\frac{1}{2(k+1)}}}\right)^k .$$

Dowód. Ustalmy u i rozważmy wektor $\vec{p}$ długości k taki, że

$$\min_{1 \leq n \leq u} \mathbb{P}(S_{\vec{p},n}) = \sup_{\vec{x} \in [0,1]^k} \min_{1 \leq n \leq u} \mathbb{P}(S_{\vec{x},n}) .$$

Z Lematu 6 wiemy, że istnieje a takie, że $\frac{p_a}{p_{a+1}} \geq u^{\frac{1}{k+1}}$. Wygodnie jest rozważyć osobno trzy przypadki: $0 < a < k$, $a = 0$ oraz $a = k$. Poniżej pokażemy rozumowanie dla przypadku $0 < a < k$. Dowód dla przypadków $a = 0$ oraz $a = k$ jest podobny.

Niech $0 < a < k$. Oznaczmy $p = p_a$ oraz $q = p_{a+1}$. Ustalmy $n = 1/\sqrt{pq}$. Zauważmy, że

$$p/q \geq u^{1/(k+1)} \quad , \quad np = \sqrt{p/q}$$

oraz

$$n^2 = (pq)^{-1} = p^{-2}(p/q) \geq p^{-2}u^{1/(k+1)} \geq u^{1/(k+1)} \ .$$

Niech $n^* = \lceil n \rceil$. Wówczas dla dowolnego $x \in (0, 1)$ mamy

$$n^* x(1-x)^{n^*-1} \leq 2nx(1-x)^{n-1} \ .$$

W poniższych rozważaniach wykorzystamy po wielokroć nierówność $x/e^x < 1.5/x^2$, która zachodzi dla $x > 0$ oraz nierówność $(1-x)^{1/x} < e^{-1}$ prawdziwą dla $x \in (0, 1)$.

Przypadek 1: $i \leq a$ oraz $p \leq 1 - \frac{1}{e}$.

$$n^* p_i(1-p_i)^{n^*-1} \leq 2np_i(1-p_i)^{n-1} \leq 2np(1-p)^{n-1} \leq 2np(1-p)^n e =$$
$$\sqrt{\frac{p}{q}}(1-p)^{\frac{1}{p}\sqrt{\frac{p}{q}}} 2e < \frac{\sqrt{\frac{p}{q}}}{\exp(\sqrt{\frac{p}{q}})} 2e < \frac{3e}{u^{1/(k+1)}} \ .$$

Przypadek 2: $i \leq a$ oraz $p > 1 - \frac{1}{e}$.

$$n^* p_i(1-p_i)^{n^*-1} \leq 2np_i(1-p_i)^{n-1} \leq 2np(1-p)^{n-1} <$$
$$2np\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} \leq 2\frac{ne}{e^n} < \frac{3e}{n^2} \leq \frac{3e}{u^{1/(k+1)}} \ .$$

Przypadek 3: $a < i \leq k$ oraz $q \leq 1 - \frac{1}{e}$.

$$n^* p_i(1-p_i)^{n^*-1} \leq 2np_i(1-p_i)^{n-1} \leq 2nq(1-q)^{n-1} \leq 2nq(1-q)^n e =$$
$$2\sqrt{\frac{q}{p}}(1-q)^{\frac{1}{q}\sqrt{\frac{q}{p}}} e < 2\frac{\sqrt{\frac{q}{p}}}{\exp(\sqrt{\frac{q}{p}})} e < 2\sqrt{\frac{q}{p}} e \leq \frac{2e}{u^{1/(2(k+1))}} \ .$$

Przypadek 4: $a < i \leq k$ oraz $q > 1 - \frac{1}{e}$.

$$n^* p_i(1-p_i)^{n^*-1} \leq 2np_i(1-p_i)^{n-1} \leq 2nq(1-q)^{n-1} < 2nq\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} \leq$$
$$\frac{2ne}{\exp(n)} < \frac{3e}{n^2} \leq \frac{3e}{u^{1/(k+1)}} \ .$$

Pokazaliśmy zatem, że dla $0 < a < k$ mamy

$$\mathbb{P}\left(S_{\vec{p},n^*}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{k}\left(1 - n^* p_i(1-p_i)^{n^*-1}\right) < 1 - \left(1 - \frac{3e}{u^{1/(2(k+1))}}\right)^k \ .$$

Wykazanie takiej nierówności dla przypadku $a = 0$ oraz $a = k$ pozostawiamy jako ćwiczenie.

■

Niech $\mathcal{W}_0$ oznacza główna gałąź funkcji Lamberta. Rozważmy dowolny wektor prawdopodobieństw $\vec{p} = (p_i)_{i=1,\ldots,k}$ długości k. Niech $S_{\vec{p},u,n}$ będzie zdarzeniem, oznaczającym wybór lidera w jednym z k slotów jeśli faktyczna liczba węzłów w sieci to n oraz $n \leq u$. Oznaczmy

$$\mathbb{P}\left(S_{\vec{p},u}\right) = \min\{\mathbb{P}\left(S_{\vec{p},u,n}\right) : n = 1, \ldots, u\} \ .$$

Twierdzenie 3 *Jeśli* $k \le \frac{\ln u}{2\ln(3e)} - 1$, $f > 1$ *oraz* $\mathbb{P}(S_{\vec{p},u}) > 1 - \frac{1}{f}$ *to*

$$k \ge \frac{\ln u}{2\mathcal{W}_0\left(\frac{3e}{2}\frac{f}{f-1}\ln u\right)} - 1\,.$$

Dowód. Jeśli $k \le \frac{\ln u}{2\ln(3e)} - 1$ to $3e/u^{1/(2(k+1)} \le 1$, więc możemy zastosować nierówność Bernoulliego ($(\forall x \le 1)((1-x)^n \ge 1 - nx)$) do Twierdzenia 2. Otrzymujemy nierówność

$$\mathbb{P}(S_{\vec{p},u}) < \frac{3ek}{u^{\frac{1}{2(k+1)}}}\,.$$

Zatem z

$$\mathbb{P}(S_{\vec{p},u}) > 1 - \frac{1}{f}$$

wnioskujemy, że

$$3eku^{\frac{-1}{2(k+1)}} > 1 - \frac{1}{f}$$

a stąd

$$3e(k+1)u^{\frac{-1}{2(k+1)}} > 1 - \frac{1}{f}\,.$$

Z powyższej nierówność otrzymujemy żądaną nierówność wykorzystując funkcję Lamberta $\mathcal{W}$ (ćwiczenie). ■

Można pokazać, że dla $x \ge e$ zachodzą nierówności (ćwiczenie)

$$\ln x - \ln\ln x < \mathcal{W}_0(x) < \ln x - \frac{1}{2}\ln\ln x\,.$$

Mamy zatem

$$\frac{\ln u}{2\mathcal{W}_0\left(\frac{3e}{2}\frac{f}{f-1}\ln u\right)} > \frac{\ln u}{2\ln\left(\frac{3e}{2}\frac{f}{f-1}\ln u\right)} = \frac{1}{2}\frac{\ln u}{\ln\ln u + \ln\left(\frac{3e}{2}\frac{f}{f-1}\right)}\,.$$

Jeśli $f > 1$ jest ustalone i u dąży do nieskończoności, to

$$\frac{\ln u}{2\mathcal{W}_0\left(\frac{3}{2}e\frac{f}{f-1}\ln u\right)} \sim \frac{\ln u}{2\ln\ln u}\,.$$

Pokazaliśmy zatem, że dla rozważnego scenariusza istnieje algorytm wyboru lidera działający w $\mathcal{O}(\ln u)$ slotach oraz, że dowolny algorytm wymaga $\Omega(\frac{\ln u}{\ln\ln u})$ slotów.

5 Lista ćwiczeń

1 — Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $X \sim Geo(p)$.

2 — Niech $p \in [0,1]$ oraz $n \ge k \ge 1, n, k \in \mathbb{N}$. Dla jakich wartości argumentu funkcja f przyjmuje wartości maksymalne?

a. $f(p) = np(1-p)^{n-1}$,
b. $f(n) = np(1-p)^{n-1}$,
c. $f(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

3 — Udowodnij: $(1+x)^r \ge 1 + rx$ dla $x \ge -1, r \ge 1$.

4 — Udowodnij: $(1+x)^r \le 1 + rx$ dla $x \ge -1, r \in (0,1)$.

5 — Udowodnij: $1 + x \le e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

6 — Udowodnij: $\frac{x}{e^x} < \frac{1.5}{x^2}$ dla $x > 0$.

7 — Niech

$$f_i(n) = n\frac{1}{2^i}\left(1 - \frac{1}{2^i}\right)^{n-1} .$$

Udowodnij, że funkcje $f_i(2^{i-1})$, $f_{i+1}(2^{i-1})$ są malejące, a funkcja $f_{i-1}(2^i)$ jest rosnąca dla $i \geq 2$.

8 — Przedstaw definicję rodziny funkcji W Lamberta i wykres jej gałęzi rzeczywistych.

9 — Wykorzystaj funkcję W Lamberta by analitycznie wyznaczyć rzeczywiste rozwiązania równania $3^x = x^3$. Jak nazwa się w programie Mathematica funkcja W Lamberta?

10 — Sprawdź, że jeśli $K \geq 1, f > 1, u \geq 2$ oraz

$$3e(K+1)u^{\frac{-1}{2(K+1)}} \geq 1 - \frac{1}{f} \quad \text{to} \quad K \geq \frac{\ln u}{2W_0(\frac{3e}{2}\frac{f}{f-1}\ln u)} - 1 .$$

11 — Przeanalizuj artykuł Inequalities on the Lambert W function and hyperpower function (Hoorfar i Hassani) a następnie przedstaw dowód, że dla $x \geq e$

$$\ln x - \ln\ln x < W_0(x) \leq \ln x - \frac{1}{2}\ln\ln x .$$