

Algorytmika 2024/2025

Lista ćwiczeń

Ćw 1 — Pokaż, że następujący problem jest nierozstrzygalny:

Mamy dwa programy P i Q obliczające funkcje z liczb naturalnych w liczby naturalne. Czy dla każdego naturalnego n zachodzi $P(n) = Q(n)$?

Wskazówka: Zredukuj problem $(\forall n)(P(n) = Q(n))$ do powyższego problemu.

Ćw 2 — Zbiór $A \subseteq \mathbb{N}^k$ nazywamy rekurencyjnie przeliczalnym (RE), jeśli istnieje całkowita funkcja obliczalna $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^k$ taka, że

$$A = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

1. Pokaż, że jeśli dla $A \subseteq \mathbb{N}$ mamy $A \in RE$ oraz $\mathbb{N} \setminus A \in RE$, to A jest zbiorem rekurencyjnym.
2. Pokaż, że jeśli A jest rekurencyjny, to A jest rekurencyjnie przeliczalny.
3. Uzasadnij tezę $STOP \in RE$.

Ćw 3 — Dla ciągów $x, y \in \Sigma^*$ określamy:

$$x \sqsubseteq y \iff (\exists z \in \Sigma^*)(y = xz), \quad x \sqsupseteq y \iff (\exists z \in \Sigma^*)(y = zx).$$

1. Pokaż, że \sqsubseteq jest częściowym porządkiem na Σ^* .
2. Wyraż relację \sqsupseteq za pomocą relacji \sqsubseteq oraz funkcji **reverse** odwracania ciągów.

Ćw 4 — Ustalmy skończony alfabet Σ oraz wzorec $P[1..m] \in \Sigma^*$. Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo tego, że losowy ciąg długości n elementów Σ jest zgodny (w jakimś miejscu) ze wzorcem P . Pokaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1.$$

Ćw 5 — Ustalmy skończony alfabet Σ . Ustalmy ciąg $A[1..k]$. Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo tego, że losowy ciąg X długości n elementów z Σ zawiera podciąg A , czyli, że istnieją $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ takie, że $X[j_i] = A[j]$ dla wszystkich $j = 1, \dots, k$.

1. Wyznacz dokładny wzór na p_n .
2. Wyznacz asymptotykę ciągu $(p_n)_n$.

cdn.