

Grafy losowe i sieci złożone

Informatyka algorytmiczna, WIT PWr
semestr zimowy 2025/2026

Rozgrzewka

Definicja 1 *Graf losowy dwumianowy $G(n, p)$ (n - liczba wierzchołków, $p \in [0, 1]$) generujemy następująco. Zaczynamy od zbioru izolowanych wierzchołków etykietowanych $\{1, 2, \dots, n\}$. Następnie dla każdej pary wierzchołków i, j takich, że $1 \leq i < j \leq n$ łączymy je krawędzią z prawdopodobieństwem p , niezależnie od pozostałych.*

Zad. 1 — Niech G będzie pewnym ustalonym grafem prostym o n etykietowanych wierzchołkach i $m \in \{0, 1, \dots, \binom{n}{2}\}$ krawędziach.

1. Ile jest takich grafów?
2. Jakie jest prawdopodobieństwo wygenerowania grafu G w schemacie $G(n, p)$?
3. Jakie jest prawdopodobieństwo wygenerowania grafu o m krawędziach w schemacie $G(n, p)$? Sprawdź, czy Twój rozkład prawdopodobieństwa sumuje się do 1. Jak wygląda ten rozkład, gdy $p = 1/2$?

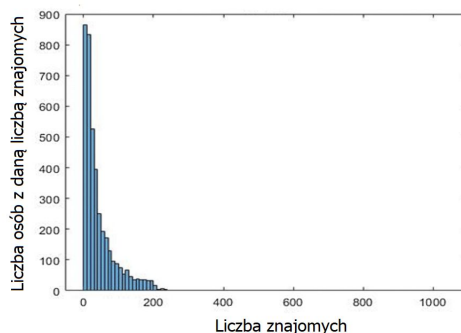
Zad. 2 — Niech $G_{n,p}$ będzie dwumianowym grafem losowym. Zdefiniujmy następujące zmienne losowe:

- $|E_{n,p}| = e(G_{n,p})$ - liczba krawędzi w $G_{n,p}$,
- $T_{n,p}$ - liczba trójkątów w $G_{n,p}$,
- $I_{n,p}$ - liczba wierzchołków izolowanych w $G_{n,p}$,
- $A_{n,p}^{\geq 2}$ - liczba wierzchołków stopnia co najmniej 2 w $G_{n,p}$,
- $D_{n,p}$ - stopień wybranego wierzchołka.

Wyznacz ich wartości oczekiwane. Jaki rozkład ma $|E_{n,p}|$? Jaki rozkład ma $D_{n,p}$?

Zad. 3 — Rozważmy następujący proces. Zaczynamy od zbioru izolowanych wierzchołków etykietowanych $\{1, 2, \dots, n\}$. Następnie dla każdej pary wierzchołków i, j takich, że $1 \leq i < j \leq n$ łączymy je krawędzią z prawdopodobieństwem p , niezależnie od pozostałych. Następnie dla każdej pary wierzchołków i, j nie połączonych krawędzią, takich, że $1 \leq i < j \leq n$, łączymy je krawędzią z prawdopodobieństwem q , niezależnie od pozostałych. Co można powiedzieć o powstałym grafie?

Zad. 4 — Załóżmy, że liczba użytkowników Facebooka w Polsce to $n = 17,6 \cdot 10^6$, zaś średnia liczba znajomych pojedynczego użytkownika to $\mu = 240$. Naszkicuj rozkład zmiennej losowej z rozkładu dwumianowego o parametrach $(n, \mu/n)$. Wiadomo, że rozkład liczby osób posiadających k znajomych na Facebooku wygląda mniej więcej tak, jak pokazano na poniższym wykresie. Czy $G(n, p)$ byłby dobrym modelem Facebooka?



Rysunek 1: Power-law

Lista 1. momentu

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ dla $n \in \mathbb{N}^+$
- $f(n) \ll g(n)$, jeżeli $f(n)/g(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- $f(n) \gg g(n)$, jeżeli $f(n)/g(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

Zad. 1 — Ile razy w życiu dowodził(a)eś nierówności Markova? Zwiększ tę liczbę o 1.

Nierówność Markova. Niech X będzie nieujemną zmienną losową. Wtedy dla każdego $a > 0$

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

Rozważmy ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=0}^\infty$ przyjmujących wartości w zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$.

1. Co można powiedzieć o $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = 0]$, jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = 0$?
2. Podaj przykład ciągu zmiennych losowych takich, że $\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, ale $\mathbb{P}[X_n = 0] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.
3. Przemyśl punkt 1. i 2.

Zad. 2 — Niech $G_{n,p}$ będzie dwumianowym grafem losowym, zaś $\mathcal{P}$ własnością „graf posiada co najmniej jedną krawędź”. Udowodnij, że dla $p = p(n) \ll 1/n^2$

$$\mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{P}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Zad. 3 — Niech $G_{n,p}$ będzie dwumianowym grafem losowym, zaś $\mathcal{P}_\Delta$ własnością „graf posiada co najmniej jeden trójkąt”. Zaproponuj sensowną funkcję $f(n)$ taką, że dla $p = p(n) \ll f(n)$

$$\mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{P}_\Delta] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Zad. 4 — Niech $G_{n,p}$ będzie dwumianowym grafem losowym, zaś $\mathcal{P}_\bullet$ własnością „graf nie posiada wierzchołków izolowanych”. Niech $\varepsilon > 0$. Udowodnij, że dla $p = p(n) \geq \frac{(1+\varepsilon) \ln n}{n}$

$$\mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{P}_\bullet] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

(Skorzystaj z nierówności $1 - x \leq e^{-x}$ dla $x \in \mathbb{R}$.)

1. Czy w zadaniu 2 dla $p = p(n) \leq (1 - \varepsilon)/n^2$ otrzymalibyśmy $\mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{P}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$?
2. Czy w zadaniu 3 dla $p = p(n) \leq (1 - \varepsilon)f(n)$ otrzymalibyśmy $\mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{P}_\Delta] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$?

Lista 2. momentu

Zad. 1 — Rozważ funkcję $f(p) = \mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{P}]$ dla $p \in [0, 1]$. Uzasadnij, że $f(p)$ jest ciągła na $[0, 1]$. Ile wynoszą $f(0)$ oraz $f(1)$ dla własności wymienionych na liście 1. momentu oraz w w Misji 1 (możesz przyjąć $n > 5$)?

Zad. 2 — Niech $\mathcal{P}$ będzie własnością monotonicznie rosnącą. Uzasadnij, że $\mathcal{P}^C$ jest własnością monotonicznie malejącą.

Zad. 3 — Pokazaliśmy, że jeśli $\mathcal{P}$ jest własnością monotonicznie rosnącą, to

$$\mathbb{P}[G_{n,m} \in \mathcal{P}] \leq \mathbb{P}[G_{n,m'} \in \mathcal{P}] \quad \text{dla} \quad m < m'.$$

Czy nierówność pozostaje prawdziwa, gdy własność $\mathcal{P}$ jest monotonicznie malejąca?

Zad. 4 — Zaproponuj coupling, dzięki któremu uzasadnisz, że jeśli $\mathcal{P}$ jest własnością monotonicznie rosnącą, to

$$\mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{P}] \leq \mathbb{P}[G_{n,p'} \in \mathcal{P}] \quad \text{dla} \quad p < p'.$$

Zad. 5 — Ile razy w życiu dowodził(a)ś nierówności Czebyszewa? Zwiększ tę liczbę o 1.

Nierówność Czebyszewa. Niech X będzie zmienną losową. Dla każdego $t > 0$ mamy

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}X| \geq t] \leq \frac{\text{Var}[X]}{t^2}.$$

Rozważmy ciąg dodatnich zmiennych losowych $(X_n)_{n=0}^\infty$.

1. Jak wygląda nierówność Czebyszewa dla $t = \mathbb{E}[X_n]$?
2. Wstaw odpowiednią nierówność pomiędzy $\mathbb{P}[X_n = 0]$ i $\mathbb{P}[|X_n - \mathbb{E}[X_n]| \geq \mathbb{E}[X_n]]$.
3. Co można powiedzieć o $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = 0]$, jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[X_n^2]}{\mathbb{E}[X_n]^2} = 1$?

Zad. 6 — Niech $G_{n,p}$ będzie dwumianowym grafem losowym. Zdefiniujmy następujące zmienne losowe:

- $|E_{n,p}| = e(G_{n,p})$ - liczba krawędzi w $G_{n,p}$,
- $T_{n,p}$ - liczba trójkątów w $G_{n,p}$.

Spróbuj wyznaczyć ich wariancje.

Lista 3. progów

Zad. 1 — Ponumerujmy wszystkie trójkąty w etykietowanym grafie K_n liczbami naturalnymi od 1 do $\binom{n}{3}$. Niech $T := T_{n,p}$ będzie zmienną losową oznaczającą liczbę trójkątów w grafie losowym $G_{n,p}$. Dla $i \in \left[\binom{n}{3}\right]$ definiujemy zmienne losowe

$$T_i = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli trójkąt numer } i \text{ należy do } G_{n,p} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Oczywiście, $T = \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} T_i$.

1. Uzasadnij, że $\mathbb{E}[T^2] = E[T] \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} \mathbb{P}[T_i = 1 | T_1 = 1]$.
2. Wyznacz $\text{Var}[T]$.
3. Czy równość analogiczna do tej z punktu 1. zachodzi dla poniższych zmiennych losowych?
 - $I_{n,p}$ - liczba wierzchołków izolowanych w $G_{n,p}$.
 - $E_{n,p}$ - liczba krawędzi w $G_{n,p}$.
 - $K_{n,p}^{(k)}$ - liczba kopii grafu K_k w $G_{n,p}$.

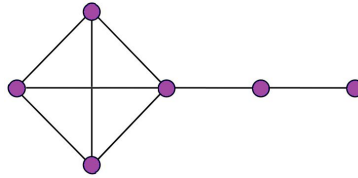
Zad. 2 — Udowodnij, że $p^*(n) = \frac{1}{n}$ jest progiem dla własności $\mathcal{P}_\Delta$ - „graf posiada trójkąt” w $G_{n,p}$.

Zad. 3 — Zaproponuj funkcję $p^*(n)$, która mogłaby być progiem dla własności $\mathcal{P}_{K_4}$ - „graf posiada kopię K_4 ” w $G_{n,p}$. Udowodnij, że Twoje $p^*(n)$ jest progiem dla $\mathcal{P}_{K_4}$.

Zad. 4 — Zaproponuj próg dla własności $\mathcal{P}_{K_k}$ - „graf posiada kopię K_k ” w $G_{n,p}$ dla stałego $k \in \mathbb{N}$. Spróbuj udowodnić, że rzeczywiście jest progiem.

Zad. 5 — Zaproponuj próg dla własności $\mathcal{P}_H$ - „graf posiada kopię H ” w $G_{n,p}$, gdzie H jest dowolnym grafem o stałej liczbie wierzchołków v_H i stałej liczbie krawędzi e_H .

1. Jak wyglądałby zaproponowany przez Ciebie próg dla grafu przedstawionego na Rysunku 2?
2. Porównaj go z progiem dla $\mathcal{P}_{K_4}$.
3. Wyciągnij wniosek.



Rysunek 2: Lollipop

Zad. 6 — Udowodnij, że $p^*(n) = \frac{\ln n}{n}$ jest ostrym progiem dla własności $\mathcal{P}_\bullet$ - „graf nie posiada wierzchołków izolowanych” w $G_{n,p}$.

Lista 4. wyzwań

Być może najpierw warto sobie przypomnieć, że

- $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k$ dla $n, k \in \mathbb{N}$,
- $1 - x \leq e^{-x}$ dla $x \in \mathbb{R}$,
- $1 - x \geq e^{-x/(1-x)}$ dla $x \in [0, 1)$,
- $f(n) = o(g(n)) \iff f(n) \ll g(n)$,
- $f(n) = \omega(g(n)) \iff f(n) \gg g(n)$.

Zad. 1 — Znajdź próg $p^*(n)$ w $G_{n,p}$ dla własności $\mathcal{P}$ - „graf jest sumą wierzchołków izolowanych i krawędzi izolowanych”.

Wskazówka: Czego nie ma graf, który jest sumą wierzchołków izolowanych i krawędzi izolowanych?

Zad. 2 — Niech $p = p(n) \ll \frac{1}{n}$ (równoważnie $p = p(n) \leq \frac{1}{\omega(1)n}$). Niech $\mathcal{P}_F$ oznacza własność „graf jest lasem”. Udowodnij, że

$$\mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{P}_F] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Wyznacz próg w $G_{n,p}$ dla własności $\mathcal{P}_F$.

Wskazówka: Pomyśl o cyklach długości co najmniej 3.

Zad. 3 — Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym, $|V| = n$. Separacją w G nazwijmy taką partycję zbioru wierzchołków $\{S, V \setminus S\}$, gdzie $1 \leq |S| \leq n/2$ oraz dla każdej krawędzi $\{v, w\} \in E$ mamy $v, w \in S$ lub $v, w \in V \setminus S$. Niech $\varepsilon > 0$ oraz $p = p(n) \geq \frac{(1+\varepsilon) \ln n}{n}$. Udowodnij, że

$$\mathbb{P}[G_{n,p} \text{ posiada separację}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Wskazówka: Jeśli badasz pewną sumę $\sum_{i=1}^{n/2}(\dots)$, to rozważ osobno $\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}(\dots)$ oraz $\sum_{i=\lfloor \sqrt{n} \rfloor+1}^{n/2}(\dots)$.

Zad. 4 — Udowodnij, że $p^*(n) = \frac{\ln n}{n}$ jest w $G_{n,p}$ ostrym progiem dla własności $\mathcal{P}_C$ - „graf jest spójny”.

Ćwiczenia z wykładu

Zad. 1 — Niech $G = (V, E)$ będzie grafem dwudzielnym z partycją wierzchołków $V = U \cup W$, gdzie $|U| = |W| = n$. Niech $S \subseteq U$ będzie najmniejszym (w sensie mocy zbioru) zbiorem w G naruszającym warunek Halla (czyli $|S| > |N(S)|$, gdzie $N(S)$ to zbiór sąsiadów wierzchołków z S).

1. Pokaż, że $|S| = |N(S)| + 1$.
2. Pokaż, że $|S| \leq \lceil n/2 \rceil$.
3. Pokaż, że każdy wierzchołek z $N(S)$ jest sąsiadem co najmniej dwóch wierzchołków z S .

Zad. 2 — Niech $I_{n,p}$ będzie liczbą wierzchołków izolowanych w dwudzielnym grafie losowym $G_{n,n,p}$. Udowodnij, że

$$\mathbb{P}[I_{n,p} = 0] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & p \leq \frac{\ln n - \omega(1)}{n} \\ 1, & p \geq \frac{\ln n + \omega(1)}{n}. \end{cases}$$