

Grafy losowe i sieci złożone

Informatyka algorytmiczna, WIT PWr
semestr zimowy 2025/2026

Misja 1. Nothing Compares 2U

Cel: oswoić $G_{n,p}$ i $G_{n,m}$

(agent 1: Mariia Hnatiuk, agent 2: Jan Poręba, agent 3: Aleksandra Wójcik)

Zad. 1 — Niech $G_{n,p}$ będzie dwumianowym grafem losowym, zaś $G_{n,m}$ jednostajnym grafem losowym. Przyjmijmy $p = \frac{m}{\binom{n}{2}}$ (dlaczego?). Zdefiniujmy własności:

- $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ - graf jest eulerowski,
- $\mathcal{P}_{\Delta}$ - graf posiada co najmniej jeden trójkąt.

1. Dobierz m tak, by $m = m(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, ale $\binom{n}{2} - m(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Dla dość dużych n porównaj na wykresach $\mathbb{P}[G_{n,m} \in \mathcal{P}_{\mathcal{E}}]$ oraz $3\sqrt{m} \mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{P}_{\mathcal{E}}]$.
Zaproponuj nierówność pomiędzy tymi funkcjami.

2. Dobierz m tak, by $m = m(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ oraz $\frac{\binom{n}{2}}{m(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Dla dość dużych n porównaj na wykresach $\mathbb{P}[G_{n,m} \in \mathcal{P}_{\Delta}]$ oraz $3 \mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{P}_{\Delta}]$.
Zaproponuj nierówność pomiędzy tymi funkcjami.

3. Czy nierówność $\mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{P}_*] \leq c \mathbb{P}[G_{n,m} \in \mathcal{P}_*]$, gdzie c jest pewną stałą, ma szansę być prawdziwa dla dowolnej własności $\mathcal{P}_*$?

Misja 2. Going Through Changes

Cel: zrozumieć $\mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{P}]$, gdy $\mathcal{P}$ jest monotoniczna

(agent 1: Jakub Musiał, agent 2: Aleksandra Zaremba)

Zad. 1 — Niech $G_{n,p}$ będzie dwumianowym grafem losowym. Zdefiniujmy własności:

- $\mathcal{P}_C$ - graf jest spójny,
- $\mathcal{P}_{\bullet}$ - graf posiada wierzchołek izolowany.

Dla każdej z własności $\mathcal{P}_*$ wygeneruj wykresy zależności $\mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{P}_*]$ od $p \in [0, 1]$ dla $n = 1, 2, 5, 10, 100, \dots$. Obserwuj, jak zmieniają się wykresy, gdy rośnie n .

Zad. 2 — Pomyśl, poeksperymentuj ze swoimi ulubionymi własnościami grafów, poczytaj...

Misja 3. Gotta Catch 'Em All

Cel: znaleźć małe podgrafy w $G_{n,p}$

(agent 1: Paweł Leśniak, agent 2: Bartosz Michalak, agent 3: Denis Stocki)

Przeczytaj rozdział 5.1 z książki Introduction to Random Graphs, A. Frieze, M. Karoński.

Zad. 1 — Opowiedz o progu dla własności zawierania małych podgrafów w $G_{n,p}$.

Zad. 2 — Wy tłumacz, co to jest graf zbalansowany oraz graf ściśle zbalansowany. Sprawdź, czy słuchacze zrozumieli Twoje tłumaczenie prosząc ich o podanie przykładu grafu, który

- nie jest zbalansowany,
- jest zbalansowany, ale nie jest ściśle zbalansowany,
- jest ściśle zbalansowany.

Zweryfikuj poprawność udzielonych odpowiedzi.