

Matematyka dyskretna

Informatyka, WIT PWR
semestr letni 2024/2025

Lista dodatkowa 2

Zad. 1 — Uogólnij rozwiązanie zadania 2 z listy „Wzór włączeń i wyłączeń” na dowolną liczbę $n \in \mathbb{N}$. Tzn. przyjmij, że rozkład n na czynniki pierwsze to $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, gdzie $\alpha_i \geq 1$ dla $i \in [k]$, a następnie wyprowadź formułę na $\varphi(n)$.

Zad. 2 — Pokaż, że $H_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \binom{n}{k}$.

Wskazówka: Oblicz całkę $\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx$.

Zad. 3 — Oblicz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{10^n}$.

Wskazówka: Rozwiniecie funkcji $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ w szereg Taylora w punkcie 0 to $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.
Przemnóż ten szereg przez szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Zad. 4 — Niech $n, k \in \mathbb{N}$. Uzasadnij, że

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{\substack{r_i \geq 1 \\ r_1 + r_2 + \dots + r_k = n}} \binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} / k!.$$

Zad. 5 — Powolny, ale nieśmiertelny robaczek R rozpoczyna wędrówkę na początku metrowej gumowej taśmy i pełźnie z prędkością 1 cm/min w kierunku jej końca. Pod koniec każdej minuty nieśmiertelny właściciel taśmy W , którego wyłącznym celem w życiu jest pokrzyżowanie planów R , rozciąga taśmę równomiernie o 1 metr (podczas tej operacji R zachowuje swoją względną pozycję). Zatem w ciągu pierwszej minuty R przepełza 1 cm (pozostaje mu 99 cm do końca), a następnie W rozciąga taśmę o jeden metr, a R zachowuje swoją względną pozycję. Czyli ostatecznie po pierwszej minucie R znajduje się 2 cm od punktu wyjścia i ma 198 cm do końca taśmy. W ciągu drugiej minuty R dopełza na 3 cm taśmy (ma 197 cm do końca), następnie W rozciąga taśmę o jeden metr, a R zachowuje swoją względną pozycję. Czyli po drugiej minucie R znajduje się 4,5 cm od punktu wyjścia i ma 295,5 cm do końca taśmy. I tak dalej... Czy R dopełźnie kiedyś do końca taśmy? Jeśli tak, to ile czasu mu to zajmie?

Zad. 6 — Stu więźniów odsiadujących wyrok w pewnym zakładzie karnym stanęło przed szansą wyjścia na wolność. Ich imiona umieszczono w stu pudełkach, ułożonych w rzędzie w zamkniętym pokoju. Każdego z więźniów wpuszczano po kolei do pokoju z zadaniem odnalezienia pudełka ze swoim imieniem. Każdy więzień mógł otworzyć co najwyżej pięćdziesiąt pudełek. Po każdym wizycie skazańca pokój zostawał przywrócony do stanu wyjściowego – wszystkie pudełka i wszystkie imiona wracały dokładnie na swoje miejsce. Więźniowie nie mogli się komunikować po przystąpieniu do realizacji zadania, ale mogli wcześniej ustalić wspólną strategię. Wszyscy mieli odzyskać wolność tylko jeżeli każdy z nich odnalazł swoje imię. Czy istnieje strategia, która dałaby im szansę na opuszczenie więzienia większą niż strategia losowa?