

LIST OF SHAME

MATEMATYKA DYSKRETNA

- Dla funkcji $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ piszemy $f(n) \sim g(n)$, jeśli $f(n)/g(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.
- Liczbę Stirlinga I rodzaju nieznakowaną oznaczamy $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.
- Liczbę Stirlinga II rodzaju oznaczamy $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.

1. Ile różnych par liczb można utworzyć z elementów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ (kolejność elementów w parze nie ma znaczenia)?
2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Uzasadnij kombinatorycznie, że

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

3. Niech $j, k, n \in \mathbb{N}$. Uzasadnij obliczeniowo i kombinatorycznie, że

$$\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}.$$

4. Niech $k, n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Zapisz w zwartej postaci

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

5. Niech $k, n \in \mathbb{N}^+$. Ile rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych ma równanie

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = n?$$

6. Załóżmy, że $k, n \in \mathbb{N}^+$ i k jest stałą. Zaproponuj wielomianową funkcję f taką, że $\binom{n}{k} \sim f(n)$.
7. Niech $A_1, A_2, \dots, A_k$ będą parami rozłącznymi zbiorami takimi, że $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = n$. Uzasadnij, że istnieje $j \in [k]$ takie, że $|A_j| \geq n/k$.
8. Uzasadnij, że $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.
9. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

(Najpierw zapisz sumę za pomocą liczb harmoniczych, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.)

10. Wyznacz asymptotyczne tempo wzrostu funkcji $f(n) = \sum_{k=1}^n k^2$.
11. Niech $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 8 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Wyznacz rozkład σ na cykle i znajdź jej znak.
12. Uzasadnij, że $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$ oraz $\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$.
13. Uzasadnij, że $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} = \binom{n}{2}$.
14. Podaj funkcję tworzącą ciągu $a_n = 3^n + 2$. Funkcją tworzącą jakiego ciągu jest $\mathcal{A}(x) = 5e^x$?
15. Rozwiąż rekurencję

$$\begin{cases} L_0 = 2, \\ L_1 = 1, \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \text{ dla } n \geq 2. \end{cases}$$

16. Wyznacz asymptotyczne tempo wzrostu liczby Catalana $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Wymień dwie rodziny struktur kombinatorycznych, których moce można wyrazić za pomocą liczb Catalana.