Sformułowanie problemu szeregowania na jednej maszynie $1|r_j|\sum w_jT_j$

Rozważmy problem szeregowania na jednej maszynie, w którym poszukuje się harmonogramu $\pi \in \Pi$, gdzie Π jest zbiorem dopuszczalnych harmonogramów, minimalizującego sumę ważonych opóźnień zadań uwzględniając czasy dostępności tych zadań. Problem ten w literaturze oznacza się w następujący sposób: $1|r_j|\sum w_jT_j$. Mianowicie, danych są n zadań, czasy wykonania zadań p_j, $j \in [n]$, momenty dostępności r_j zadań $j \in [n]$, wagi w_j zadań $j \in [n]$ oraz pożądane momenty zakończenia zadań d_j, $j \in [n]$. Moment rozpoczęcia t_j zadania, w dopuszczalnym harmonogramie π, musi spełniać ograniczenie $t_j \geqslant r_j$ (można rozpocząć zadanie j, kiedy jest dostępne). Opóźnienie T_j zadania j, w dopuszczalnym harmonogramie π, obliczamy następująco: $T_j(C_j(\pi)) = \max\{0, C_j(\pi) - d_j\}$, gdzie $C_j(\pi)$ jest momentem zakończenia j-tego zadania w harmonogramie π. Problem szeregowania $1|r_j|\sum w_jT_j$ można formalnie zapisać:

$$\min_{\pi\in\Pi} \sum_{j\in[n]} w_jT_j(C_j(\pi)).$$

Model

Zdefiniujmy horyzont czasowy $\{1,\ldots,T\}$, gdzie $T = \max_{j\in}\{r_j\} + \sum_{j\in[n]} p_j$. Horyzont jest zbiorem T okresów. Oznaczmy przez t okres, $t \in [T]$, w horyzoncie czasowym $\{1,\ldots,T\}$. Okres t rozpoczyna się w momencie $t-1$ i kończy się w momencie t.

Zmienne decyzyjne

Zmienne decyzyjne, wyznaczające harmonogram π definiujemy następująco:

$$x_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli zadanie } j \text{ rozpoczyna się w momencie } t-1, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \qquad j \in [n],\ t \in [T].$$

Ograniczenia

Ograniczenia modelują następujące sytuacje:

- Każde zadanie j rozpoczyna się w dokładnie jednym momencie:

$$\sum_{t=1}^{T-p_j+1} x_{jt} = 1 \; j \in [n].$$

- Moment rozpoczęcia t_j zadania, w dopuszczalnym harmonogramie, musi spełniać ograniczenie $t_j \geqslant r_j$ (można rozpocząć zadanie j, kiedy jest dostępne):

$$\sum_{t=1}^{T-p_j+1} (t-1)x_{jt} \geqslant r_j \; j \in [n].$$

- Co najwyżej jedno zadanie wykonywane jest na maszynie w każdym okresie horyzontu czasowego (wykonywane zadanie nie nakładają się):

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=\max\{1,t-p_j+1\}}^{t} x_{js} \leqslant 1, t \in [T].$$

- Binarność zmiennych decyzyjnych:

$$x_{jt} \in \{0,1\},\ j \in [n],\ t \in [T].$$

Funkcja celu

Funkcja celu:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T-p_j+1} w_j \max\{0, t-1+p_j-d_j\} x_{jt},$$

gdzie wyrażenie $\max\{0, t-1+p_j-d_j\}$ modeluje opóźnienie $T_j(C_j(\pi)) = \max\{0, C_j(\pi)-d_j\}$ zadania j, a $t-1+p_j$ jest momentem zakończenia $C_j(\pi)$ j-tego zadania w harmonogramie π, jeśli zadanie j rozpoczyna się w momencie $t-1$ ($x_{jt}=1$).