Lista nr 1 – ćwiczenia[1]

1. Podać egzemplarze, $\mathbb{X}$ zbiór rozwiązań dopuszczalnych i funkcję kosztu (celu) f, następujących problemów:
   (a) problemu najkrótszej ścieżki między dwoma wyróżnionymi wierzchołkami w grafie, którego wagi reprezentują odległość,
   (b) problemu komiwojażera,
   (c) problemu plecakowego,
   (d) problemu maksymalnej spełnialności,
   (e) problemu polegającego na podziale zbioru S zawierającego $2n$ liczb naturalnych na dwa zbiory S_1 i S_2 takie, że $|S_1| = |S_2| = n$ i suma liczb z S_1 jak najmniej różniła się od sumy liczb z S_2,
   (f) **własnego problemu**.

2. Pokazać, że przekrój zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

3. Niech c w będzie funkcją wypukłą w S, $c : S \to \mathbb{R}$, i $t \in \mathbb{R}$. Pokazać, że zbiór $S_t = \{x : c(x) \leqslant t, x \in S\}$ jest wypukły.

4. Czy iloczyn dwóch funkcji wypukłych jest wypukły? Jeśli tak, to podać dowód. Jeśli nie, to podać kontrprzykład.

   Co z sumą, maksimum, minimum funkcji wypukłych?

5. Niech $f(\boldsymbol{x})$ będzie funkcją wypukłą w $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Czy funkcja $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b})$, gdzie $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem stałych, jest funkcją wypukłą w $\mathbb{R}^n$?

6. Niech $f(\boldsymbol{x})$ będzie funkcją wypukłą w $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Czy funkcja $g(\boldsymbol{x}) = h(f(\boldsymbol{x}))$, gdzie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją niemalejącą funkcją wypukłą, jest funkcją wypukłą w $\mathbb{R}^n$?

7. Niech funkcja $f(\boldsymbol{x})$ będzie funkcją wypukłą w $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ustalmy $x_2, \ldots, x_n$ i rozważmy funkcję $g(x_1) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Czy g jest wypukła w $\mathbb{R}$?

8. Niech $f(x_i)$ będzie funkcją wypukłą jednej zmiennej x_i. Wtedy funkcja $g(\boldsymbol{x}) = f(x_i)$ może być rozważana jako funkcja $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Czy g jest wypukła w $\mathbb{R}^n$?

9. Czy następujące funkcje są wypukłe w S:
   (a) $f(x, y) = xy$, $S = \mathbb{R}^2$,
   (b) norma:
   $$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i \in [n]} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
   dla $p \geqslant 1$, $S = \mathbb{R}^n$,

[1] Większość zadań pochodzi z książki: C.H. Papadimitriou, K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization. Algorithms and Complexity*, Dover Publication, Inc, Mineola, 1998.

(c) funkcja straty:

$$MSE(\boldsymbol{\Theta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{\Theta}))^2,$$

gdzie n jest liczbą przykładów treningowych, $(\boldsymbol{x}^{(i)}, y_i)$, $i \in [n]$, są danymi treningowymi,

$$\hat{y}(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{\Theta}) = \Theta_0 + \Theta_1 \cdot x_1^{(i)} + \Theta_2 \cdot x_2^{(i)} + \ldots + \Theta_m \cdot x_m^{(i)},$$

$S = \mathbb{R}^m$.

10. Czy następujące problemy są problemami programowania wypukłego?

(a)

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &\to \min \\ \text{przy warunku } (x_1-1)^2 + (x_1-1)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Wyznacz minima lokalne (globalne) powyższego problemu.

(b)

$$\begin{array}{rc} & \max\limits_{k=1,\ldots,s}\{\boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{x}\} \quad \to \min \\ \text{przy warunkach} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant 0, \end{array} \qquad \begin{array}{rc} & \min\limits_{k=1,\ldots,s}\{\boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{x}\} \quad \to \max \\ \text{przy warunkach} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant 0, \end{array}$$

są danymi parametrami problemu $\boldsymbol{c}_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in [s]$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Co będzie jeśli funkcja celu będzie postaci: $\min\limits_{k=1,\ldots,s}\{\boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{x}\} \to \min$ ($\max\limits_{k=1,\ldots,s}\{\boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{x}\} \to \max$) przy powyższych warunkach?

11. Niech $f : \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ w zbiorze wypukłym $\mathbb{X}$ i f jest wypukła w $\mathbb{X}$. Pokazać, że jeśli dla $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{X}$,

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0},$$

to $\boldsymbol{x}^*$ jest optymalny w $\mathbb{X}$.

12. Niech $f : \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f jest wypukła w zbiorze wypukłym $\mathbb{X}$. Pokazać, że wtedy dla każdego odcinka domkniętego $[\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}] \subset \mathbb{X}$ maksimum globalne funkcji f w $[\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}]$ jest osiągniete w jednym końców odcinka, $\boldsymbol{x}^{(1)}$ lub $\boldsymbol{x}^{(2)}$.

13. Niech $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym i $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \geqslant 0$, $\sum_{j\in[\ell]} \lambda_i = 1$. Pokazać, że jeśli $\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^\ell \in \mathbb{X}$, to

$$\sum_{j\in[\ell]} \lambda_j \hat{\boldsymbol{x}}^j \in \mathbb{X}.$$

Wsk.: Pokazać indukcyjnie.

14. Niech $f : \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f jest wypukła w zbiorze wypukłym $\mathbb{X}$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \geqslant 0$, $\sum_{j\in[\ell]} \lambda_i = 1$. Pokazać, że jeśli $\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^\ell \in \mathbb{X}$, to

$$f\left(\sum_{j\in[\ell]} \lambda_j \hat{\boldsymbol{x}}^j\right) \leqslant \lambda_1 f(\hat{\boldsymbol{x}}^1) + \cdots + \lambda_\ell f(\hat{\boldsymbol{x}}^\ell).$$

Wsk.: Pokazać indukcyjnie - podobnie jak w zadaniu 13.

15. Niech $f : \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f jest wypukła w wielościanie wypukłym $\mathbb{X}$ i $\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^\ell \in \mathbb{X}$ są wierzchochołkami tego wielościanu. Pokazać, że maksimum globalne funkcji f w $\mathbb{X}$ jest osiągniete w co najmniej jednym wierzchołku zbioru $\mathbb{X}$.
    Wsk.: Skorzystać z twierdzenia "bez dowodu" (zob. wykład 3) i zadania 14.

16. Uzasadnić, że zbiory rozwiązań optymalnych następujących problemów są identyczne:

    (a)
    $$\min_{x\in\mathbb{X}} f(x) \qquad \text{i} \qquad \max_{x\in\mathbb{X}} -f(x),$$

    (b)
    $$\min_{x\in\mathbb{X}} f(x) \qquad \text{i} \qquad \min_{x\in\mathbb{X}}\{p\, f(x) + q\},$$

    gdzie $p > 0$.

17. Pokaż, że problemy programowania całkowitoliczbowego zawierają się w klasie problemów programowania nieliniowego.

    Wsk.: Należy podać transformację zadania programowania całkowitoliczbowego, tj.

    $$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{przy warunkach } &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n_+ \end{aligned}$$

    do problemu programowania nieliniowego, tj.

    $$\begin{aligned} &\min f(\boldsymbol{x}) \\ \text{przy warunkach } &g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, m \\ &\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+, \end{aligned}$$

    gdzie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ są funkcjami nieliniowymi.

18. Sformułować model programowania liniowego problemu, w którym dane jest m dostawców z zasobami s_i (jednostek), $i = 1, \ldots, m$, pewnego towaru i n odbiorców o zapotrzebowaniu w wysokości d_j (jednostek), $j = 1, \ldots, n$, na ten towar, $\sum_{i=1}^m s_i \geqslant \sum_{j=1}^n d_j$. Każdy dostawca i może zaopatrywać dowolnego odbiorcę. Koszt transportu za jednostkę towaru na trasie od dostawcy i do odbiorcy j jest wysokości c_{ij} (jest dany). Należy wyznaczyć plan transportu między dostawcami i odbiorcami, tak aby zaspokoić zapotrzebowanie odbiorców minimalizując łączne koszty transportu.

19. Niech N będzie otoczeniem dla problemu z zadania 1e, zawierającym rozwiązania dopuszczalne powstałe przez wymianę dwóch liczb, z których jedna należy do S_1 a druga do S_2. Czy N jest otoczeniem dokładnym?

20. Pokazać, że otoczenie 2-wymiana (2-change), używane w algorytmie 2-opt dla problemu komiwojażera, nie jest dokładne.

21. Zdefiniuj jakiś optymalizacyjny problem kombinatoryczny (może być znany). Zaproponuj dla niego jakieś otoczenie.

22. Rozważmy problem polegający na znalezieniu permutacji π, n nieujemnych wag w_i, $i = 1, \ldots, n$, takiej, że
$$\sum_{i=1}^{n} i\, w_{\pi(i)} \text{ jest minimalna.}$$
Pokazać, że otoczenie składające się z permutacji będących wynikiem zamian dwóch sąsiednich wag jest dokładne.

23. Pokazać, że otoczenie dla minimalnego drzewa rozpinającego, zdefiniowane na wykładzie, jest dokładne.

24. Sformułować problem minimalnego drzewa rozpinającego (MST) jako problem programowania liniowego w grafie $G = (V, E)$, gdzie V i E są odpowiednio zbiorami wierzchołków i krawędzi, $|V| = n$, $|E| = m$, z m zmiennymi decyzyjnymi (zmienne odpowiadają krawędziom) - uogólnij model z wykładu.

    Wsk. Model programowania liniowego wymaga dużej liczby ograniczeń, tzn. oprócz ograniczenia, które mówi, że rozwiązanie dopuszczalne ma $n-1$ krawędzi trzeba dodać ograniczenia eliminujące cykle, których liczba może być ponadwielomianowa.