Lista nr 2 – ćwiczenia[1]

1. Sprowadzić następujące egzemplarze programowania liniowego do postaci standardowej:

$$\begin{array}{rl} 3x_1 - 2x_2 & \to \max \\ x_1 + x_2 & \geqslant 4, \\ -3x_1 + 2x_2 & \geqslant 8, \\ x_1 - x_2 & \leqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -2x_1 + x_2 & \to \max \\ -9x_1 + 10x_2 & \geqslant 1, \\ 20x_1 - 1x_2 & \geqslant 60, \\ x_2 & \leqslant 3, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \in \mathbb{R}, & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} x_1 + x_2 + x_3 & \to \max \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 & \leqslant 12, \\ x_3 & \geqslant 2, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \leqslant 0, x_3 \in \mathbb{R}. & \end{array}$$

2. Niech $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ i

$$\mathbb{X} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\},$$
$$\overline{\mathbb{X}} = \{\overline{\boldsymbol{x}}^T = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}]^T \in \mathbb{R}^{m+n} \,:\, \overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{x}} \geqslant \boldsymbol{0}\},$$

gdzie $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^m$ są zmiennymi uzupełniającymi a $\overline{\boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}] \in \mathbb{R}^{m\times m+n}$. Pokazać, że

(a) istnieje bijekcja między $\mathbb{X}$ i $\overline{\mathbb{X}}$,

(b) istnieje bijekcja między wierzchołkami zbioru $\mathbb{X}$ i wierzchołkami zbioru $\overline{\mathbb{X}}$.

3. Przedsiębiorstwo produkuje dwa produkty za pomocą dwóch linii produkcyjnych. Linia 1 jest dostępna przez 100 godzin, natomiast linia 2 przez 42 godziny. W celu wyznaczenia ilości produkowanych produktów (x_1 i x_2) przedsiębiorstwo sformułowało następujące zadanie programowania liniowego.

$$\begin{array}{rrcrll} f(x) = & 6x_1 & + & 4x_2 & \longrightarrow & \max \ \text{(zysk, \$)} \\ & 10x_1 & + & 10x_2 & \leqslant 100 & \text{(linia 1, godz.)} \\ & 7x_1 & + & 3x_2 & \leqslant 42 & \text{(linia 2, godz.)} \\ & & & x_1, x_2 & \geqslant 0 & \end{array}$$

Wyznaczyć graficznie rozwiązanie optymalne.

4. Posługując się ilustracją graficzną zbioru zadanego ograniczeniami:

$$\begin{array}{rcrl} 3x_1 & + & 6x_2 & \geqslant 18 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & \leqslant 8 \\ & & x_1, x_2 & \geqslant 0 \end{array}$$

należy wyznaczyć w nim:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 4x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max, \\ f(x) & = & -2x_1 - 2x_2 \longrightarrow \max, \\ f(x) & = & 2x_1 - 4x_2 \longrightarrow \max\,. \end{array}$$

Co można powiedzieć o rozwiązaniach optymalnych?

[1] Większość zadań pochodzi z książki: C.H. Papadimitriou, K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization. Algorithms and Complexity*, Dover Publication, Inc, Mineola, 1998.
Zbiór zadań z programowania matematycznego, praca zbiorowa pod redakcją Z. Galasa, I. Nykowskiego, PWN, Warszawa, 1986

5. Rozważmy następujący układ równań:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

   Czy rozwiązanie $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ jest rozwiązanie bazowym układu? Jakie są rozwiązania bazowe układu?

6. Rozważmy modele programowania liniowego z zadania 3.
   (a) Sprowadzić zadanie do postaci standardowej.
   (b) Wyznaczyć wszystkie rozwiązania bazowe układu równości.
   (c) Wyznaczyć wszystkie rozwiązania bazowe dopuszczalne.
   (d) Wyznaczyć wszystkie wierzchołki zbioru rozwiązań dopuszczalnych.

7. Rozwiązanie bazowe dopuszczalne (wierzchołek) nazywamy *zdegenerowanym* jeśli wektor $\boldsymbol{x}^T = [x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n]$ reprezentujący to rozwiązanie zawiera więcej niż $n - m$ zerowych składowych.
   (a) Przedstawić graficznie zbiór rozwiązań dopuszczalnych następującego egzemplarza problemu programowania liniowego:

$$\begin{array}{rl} x_1 + x_2 & \to \min \\ x_1 + x_2 & \geqslant 4, \\ x_1 - 2x_2 & \geqslant -6, \\ x_1 - x_2 & \geqslant -2, \\ x_1 & \geqslant 2, \\ x_1 \geqslant 0, x_1 \geqslant 0. & \end{array}$$

   Następnie sprowadzić powyższy egzemplarz do postaci standardowej i wyznaczyć rozwiązania bazowe dopuszczalne odpowiadające macierzom: $B = [B_1, B_2, B_3, B_4]$, $B^{'} = [B_1, B_2, B_3, B_5]$, $B^{''} = [B_1, B_2, B_4, B_5]$ i $B^{'''} = [B_1, B_4, B_5, B_6]$. Które z tych rozwiązań są zdegenerowane?
   (b) Udowodnić, że jeśli rozwiązanie bazowe dopuszczalne odpowiada dwóm różnym macierzom bazowym, to rozwiązanie jest zdegenerowane.
   (c) Pokazać, że implikacja przeciwna nie jest prawdziwa, tj. może istnieć rozwiązanie zdegenerowane takie, że odpowiadająca mu baza jest jednoznaczna.

8. Dany jest egzemplarz problemu liniowego programowania, w którym n zmiennych decyzyjnych jest nieograniczonych co do znaku ($x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$). Pokazać, że zmienne te mogą być zastąpione $n + 1$ nieujemnymi zmiennymi decyzyjnymi, tj. $x_i^{'} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n + 1$.

   Komentarz: W zad. 1 używaliśmy więcej zmiennych ($x_i \in \mathbb{R}$ była zastępowana przez x_i^+ i x_i^-). Okazuje się, że można to zrobić oszczędniej.

9. Pokazać, że zbiór rozwiązań optymalnych egzemplarza problemu liniowego programowania jest zbiorem wypukłym.

10. Czy fakt, że każde rozwiązanie bazowe dopuszczalne problemu liniowego programowania liniowego jest niezdegenerowane implikuje, że ten problem ma jednoznaczne rozwiązanie optymalne? Udowodnij to albo podaj kontrprzykład.

11. Wykazać, że problemy programowania liniowego:

$$\min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \,:\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\},$$
$$\min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \,:\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$$

    mają ten sam zbiór rozwiązań optymalnych.

12. Wykazać, że w problemie programowania liniowego:

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \,:\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\},$$

    gdzie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, optymalna wartość funkcji celu nie jest większa od

$$\min\{\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \,:\, \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \leqslant b_i, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\} \,:\, i \in [m]\},$$

    gdzie $\boldsymbol{a}_i^T$ jest i-tym wierszem macierzy $\boldsymbol{A}$.

13. Wykorzystać rozwiązanie problemu programowania liniowego:

$$\min\{\boldsymbol{a}_0^T\boldsymbol{x} \,:\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$$

    do zbadania, czy problem

$$\min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \,:\, \boldsymbol{a}_0^T\boldsymbol{x} \leqslant b_0, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$$

    jest sprzeczny.

14. Rozważmy problemy programowania liniowego:

$$\min\{z \,:\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - z = 0, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}, \tag{1}$$
$$\min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \,:\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}. \tag{2}$$

    Pokazać, że wektor $[\boldsymbol{x}^*, z^*]^T$ jest rozwiązaniem optymalnym (1) wtedy i tylko, wtedy, gdy $\boldsymbol{x}^*$ jest rozwiązaniem optymalnym (2) i z^* jest optymalną wartością w tym problemie.