LISTA NR 3 – ĆWICZENIA

1. Sprowadzić do problemów programowana liniowego (LP) następujące problemy:

(a)

$$\begin{array}{rl} & \max\limits_{k=1,\dots,s} \boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{x} \quad \to \min \\ \text{przy warunkach} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant 0, \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \min\limits_{k=1,\dots,s} \boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{x} \quad \to \max \\ \text{przy warunkach} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant 0. \end{array}$$

Co będzie jeśli funkcja celu będzie postaci: $\min\limits_{k=1,\dots,s} \boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{x} \to \min$ ($\max\limits_{k=1,\dots,s} \boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{x} \to \max$) przy powyższych warunkach?

(b)

$$\begin{array}{rl} & ||\boldsymbol{x}||_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \to \min \\ \text{przy warunkach} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \sum\limits_{j=1}^{n} w_j|\boldsymbol{c}_j^T\boldsymbol{x} - r_j| \to \min \\ \text{przy warunkach} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant 0, \end{array}$$

gdzie $w_j > 0$, r_j, $j = 1,\dots,n$ są znanymi liczbami.

(c)

$$\begin{array}{rl} & \sum\limits_{t=1}^{T} \max\left\{ c_t^I\left(\sum\limits_{k=1}^{t} x_k - \sum\limits_{k=1}^{t} d_k\right), c_t^B\left(\sum\limits_{k=1}^{t} d_k - \sum\limits_{k=1}^{t} x_k\right)\right\} \to \min \\ \text{przy warunkach} & l_t \leqslant x_t \leqslant u_t, \quad t = 1,\dots,T, \end{array}$$

gdzie $c_t^I, c_t^B, l_t, u_t, d_t \geqslant 0$, $T \in \mathbb{N}$, są danymi parametrami problemu.
Wsk. Zauważ, że jeśli $\sum_{k=1}^{t} x_k - \sum_{k=1}^{t} d_k > 0$, to $\sum_{k=1}^{t} d_k - \sum_{k=1}^{t} x_k < 0$.

2. Poniżej podana jest tablica simpleksowa dla następującego zadania LP:

$$\begin{array}{rrcll} & -30x_1 & - & 20x_2 & \to \min \\ \text{przy warunkach} & 2x_1 & + & x_2 & \leqslant 1000, \\ & 3x_1 & + & 3x_2 & \leqslant 2400, \\ & \frac{3}{2}x_1 & & & \leqslant 600, \\ & & x_1, & x_2 \geqslant 0. & \end{array}$$

c_j			-30	-20	0	0	0
	zmienne bazowe	wartości zm. bazowych	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
-20	x_2	600	0	1	-1	2/3	0
0	s_3	300	0	0	-3/2	1/2	1
-30	x_1	200	1	0	1	-1/3	0
	z_j	-18000	-30	-20	-10	-10/3	0
	$c_j - z_j$		0	0	10	10/3	0

(a) Podaj aktualne rozwiązanie bazowe.

(b) Czy rozwiązanie w tablicy jest optymalne? Jeżeli nie jest to wykonaj odpowiednią ilość kroków algorytmem sympleks w celu otrzymania rozwiązania optymalnego. W przeciwnym przypadku (jeżeli jest) odpowiedź uzasadnij.

(c) Podaj rozwiązanie optymalne.

(d) Czy rozwiązanie optymalne jest jednoznaczne?

(e) Podaj optymalne rozwiązanie zadania dualnego.

(f) Jaka jest wartość funkcji celu zadania dualnego dla rozwiązania optymalnego?

(g) (*Analiza wrażliwości*) W jakich granicach może się zmieniać współczynnik funkcji celu przy x_1, aby rozwiązanie pozostawało optymalne?

3. (Sysło 1999) Dany jest układ równań liniowych

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Wyjaśnić dlaczego jego rozwiązanie można otrzymać rozwiązując następujące zadanie LP:

$$\begin{array}{ll} & y \to \min \\ \text{przy warunkach} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) y = b_i \quad i = 1, \ldots, n, \\ & z_j \geqslant 0, y \geqslant 0, \end{array}$$

obliczając następnie x_j jako $x_j = z_j - y$, $j = 1, \ldots, n$.

4. Wykazać, że nastepujące problemy programowania liniowego:

$$\min \sum_{i\in[m]} 1\, x_i^A$$
$$\begin{cases} \mathbf{I}\boldsymbol{x}^A + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}^A \geqslant \mathbf{0}, \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol{x}^A \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem sztucznych zmiennych, i

$$\min \sum_{i\in[m]} 0\, x_i^A - \sum_{i\in[m]} a_{i1}x_1 - \cdots - \sum_{i\in[m]} a_{in}x_n$$
$$\begin{cases} \mathbf{I}\boldsymbol{x}^A + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}^A \geqslant \mathbf{0}, \end{cases}$$

mają ten sam zbiór rozwiązań optymalnych.

5. (Sysło 1999) Dane jest następujące zadanie LP:

$$\begin{array}{lrcrl} & 10x_1 & + & x_2 & \to \min \\ \text{przy warunkach} & x_1 & & & \leqslant 1, \\ & 20x_1 & + & x_2 & \leqslant 100, \\ & & x_1, & x_2 \geqslant 0. & \end{array}$$

Ile iteracji wykona algorytm sympleks rozwiązując to zadanie?

6. (Murty 1976) Pokazać, że zagadnieniem dualnym do zagadnienia prymalnego

$$
\begin{array}{lrrrl}
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & \to \min \\
\text{przy warunkach} & & -x_2 & +x_3 & \geqslant -1, \\
 & x_1 & & -x_3 & \geqslant -1, \\
 & -x_1 & +x_2 & & \geqslant -1, \\
 & x_1, & x_2, & x_3 \geqslant 0, &
\end{array}
$$

jest ono samo.

7. (Sysło 1999) Dane jest następujące zadanie programowania liniowego:

$$
\begin{array}{lrl}
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n & \to \max \\
\text{przy warunkach} & x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \leqslant 1, & \\
 & x_2 + x_3 + \cdots + x_n \leqslant 1, & \\
 & \cdots & \\
 & x_n \leqslant 1, & \\
 & x_i \geqslant 0 \text{ dla wszystkich } i. &
\end{array}
$$

Rozpatrzyć zadanie do niego dualne i wyznaczyć jego rozwiązanie optymalne bez wykonywania jakichkolwiek obliczeń numerycznych.

8. (Sysło 1999) Dane jest zadanie programowania liniowego

$$
\begin{array}{lcl}
 & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi} & \to \min \\
\text{przy warunkach} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}, & \\
 & -\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\pi} \geqslant -\boldsymbol{c}, & \\
 & \boldsymbol{x} \geqslant 0, \boldsymbol{\pi} \geqslant 0, &
\end{array}
$$

gdzie $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ są macierzami odpowiednio rozmiaru $m \times n$, $m \times 1$, $n \times 1$. Udowodnić, że zadanie to albo nie ma rozwiązania dopuszczalnego, albo jego rozwiązaniem jest wektor $(\boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{\pi}^T)$, taki że $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi} = 0$.

9. (Sysło 1999) Dane jest następujące zadanie programowania LP

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
 & x_1 & +4x_2 & + & 3x_4 & +x_5 & +x_6 & \to \min \\
\text{przy warunkach} & -x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & & = -3, \\
 & 2x_1 & +x_2 & -4x_3 & -x_4 & & +x_6 & = -2, \\
 & & & & & & & x_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, 4.
\end{array}
$$

Pokazać, że prymalne rozwiązanie $x_5 = -3$, $x_6 = -2$ jest dualnie dopuszczalne. Podać odpowiadające rozwiązanie dualne.