Lista nr 3 cd. – Ćwiczenia

1. Rozważmy zagadnienie plecakowe w wersji *ciągłej* sformułowane za pomocą następującego zadania programowania liniowego **LP**:

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} &a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leqslant b,\\ &0 \leqslant x_i \leqslant 1, \;\; \forall i \in [n]. \end{aligned}$$

Następujący algorytm wyznacza rozwiązanie problemu **LP**:

- Uporządkuj przedmioty w **nierosnącym** porządku względem stosunków $\frac{c_i}{a_i}$, $\frac{c_1}{a_1} \geqslant \cdots \geqslant \frac{c_n}{a_n}$.
- Włóż do plecaka przedmiot (podstaw $x_i^* = 1$) o największym stosunku (najbardziej atrakcyjny).

  Powtarzaj proces dopóki plecak nie jest pełny.
- $x_1^* = \cdots = x_r^* = 1, x_{r+1}^* = \frac{1}{a_{r+1}}(b - a_1 - \cdots - a_r), x_{r+2}^* = \cdots = x_n^* = 0$ (r pierwszych przedmiotów zmieściło się w całości w plecaku, tylko część $r+1$-szego przedmiotu jest w plecaku).

Pokazać, korzystając z dualności, że $\boldsymbol{x}^*$ jest rozwiązaniem optymalnym problem **LP** a co za tym idzie rozwiązaniem optymalnym zagadnienia plecakowego w wersji *ciągłej*.

2. Załóżmy, że wagi przedmiotów a_i, $i \in [n]$, w problemie plecakowym, w wersji ciągłej (zob. zad. 1), mogą się wahać. Niech $\mathcal{U}(\Gamma^c)$ będzie zbiorem możliwych wag przedmiotów (n-elementowych wektorów wag) zdefiniowanym następująco:

$$\mathcal{U}(\Gamma^c) = \{\tilde{\boldsymbol{a}} = (\tilde{a}_i)_{i\in[n]} = (a_i + \delta_i)_{i\in[n]} \,:\, 0 \leqslant \delta_i \leqslant \hat{a}_i, \sum_{i\in[n]} \delta_i \leqslant \Gamma^c\} \subset \mathbb{R}^n_+,$$

gdzie wagi nominalne a_i, $i \in [n]$, odchylenia wag $\hat{a}_i \geqslant 0$, $i \in [n]$, i budżet $\Gamma^c > 0$ (górne ograniczenie na sumę odchyleń) są dane.

Chcemy wyznaczyć rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ (wybór przedmiotów) w problemie plecakowym, w wersji ciągłej (zob. zad. 1), odporne na wahania wag, co jest równoważne następującemu problemowi liniowego programowania:

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max \tag{1}$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_1x_1 + \cdots + \tilde{a}_nx_n \leqslant b, && \forall \tilde{\boldsymbol{a}} \in \mathcal{U}(\Gamma^c),\\ &0 \leqslant x_i \leqslant 1, && \forall i \in [n], \end{aligned} \tag{2}$$

czyli $\boldsymbol{x}$ ma być dopuszczalny dla wszystkich wahań wag $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \mathcal{U}(\Gamma^c)$ - jeśli taki $\boldsymbol{x}$ istnieje. Problem (1)-(2) można zapisać następująco:

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max \tag{3}$$

przy ograniczeniach:

$$\max_{\tilde{\boldsymbol{a}} \in \mathcal{U}(\Gamma^c)} \tilde{a}_1 x_1 + \cdots + \tilde{a}_n x_n \leqslant b, \tag{4}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \forall i \in [n], \tag{5}$$

Podać model programowania liniowego, z wielomianową liczbą ograniczeń, problemu (3)-(5).

Wsk. Skorzystać z dualności.

Podać podobny model dla zbioru wag następującej postaci:

$$\mathcal{U}(\Gamma^d) = \{\tilde{\boldsymbol{a}} = (\tilde{a}_i)_{i\in[n]} = (a_i + \delta_i \hat{a}_i)_{i\in[n]} \,:\, \delta_i \in \{0,1\}, \sum_{i\in[n]} \delta_i \leqslant \Gamma^c\} \subset \mathbb{R}^n_+,$$

gdzie wagi nominalne a_i, $i \in [n]$, odchylenia wag $\hat{a}_i \geqslant 0$, $i \in [n]$, i budżet $\Gamma^d \in \mathbb{Z}_+$ (górne ograniczenie na liczbę wag, które mogą się odchylić) są dane.

Wsk. Skorzystać z dualności (tutaj relaksacja zachowuje jest całkowitoliczbowość $\delta_i \in \{0,1\}$).

3. Rozważmy następujący problem:

The k most vital arcs in the shortest path problem

Wejście: Graf skierowany spójny $G = (V, E)$, gdzie V jest zbiorem wierzchołków, $|V| = n$, E jest zbiorem łuków, $|E| = m$, dwa różnione wierzchołki $s \in V$ (źródło) i $t \in V$ (ujście), nieujemne koszty łuków $c_e \in \mathbb{Z}_+$, $e \in E$ oraz liczba $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \ll m$. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest następującej postaci (podzbiory E o mocy co najwyżej k):

$$\mathbb{X} = \{U \subset E \,:\, |U| \leqslant k\}.$$

Niech $\mathcal{P}(U)$ będzie zbiorem ścieżek od s do t w grafie G, w którym usunięto łuki należące do $U \in \mathbb{X}$, $G' = (V, E \setminus U)$, tj.

$$\mathcal{P}(U) = \{p \,:\, p \text{ jest ścieżką od } s \text{ do } t \text{ w grafie } G' = (V, E \setminus U)\ \}.$$

Funkcja celu (kosztu) $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Z}_+$,

$$f(U) = \min_{p \in \mathcal{P}(U)} \sum_{e \in p} c_e.$$

Wyjście: Podzbiór łuków $U^* \in \mathbb{X}$ taki, że

$$f(U^*) = \max_{U \in \mathbb{X}} f(U).$$

Zatem w powyższym problemie należy znaleźć podzbiór łuków o mocy co najwyżej k, których usunięcie zwiększa maksymalnie długość najkrótszej ścieżki od s do t.

Podać model programowania całkowitoliczbowego, z wielomianową liczbą ograniczeń, powyższego problemu.

Wsk. Skorzystać z dualności (problem najkrótszej ścieżki można zapisać w postaci programowania liniowego). Usunięcie łuku z grafu można modelować jako nadanie łukowi bardzo dużego kosztu (M duża liczba).

4. Rozważmy pewien problem wyboru, w którym dane jest n elementów oraz koszty tych elementów $c_i \geqslant 0$, $i \in [n]$. Problem polega na wyborze dokładnie p elementów, $p < n$, spośród n elementów, których całkowity koszt jest minimalny. Problem formalnie można zapisać w następujący sposób:

   $$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} \sum_{i \in \boldsymbol{x}} c_i,$$

   gdzie $\mathbb{X}$ jest zbiorem rozwiązań dopuszczalnych, tj. $\mathbb{X} = \{\boldsymbol{x} \subset [n] : |\boldsymbol{x}| = p\}$.

   Podać algorytm o złożonośći $O(n)$ i uzasadnić jego poprawność stosując argumentację opartą na dualności.

   Wsk. Model prymalny (relaksacja **LP**) problemu zachowuje całkowitoliczbowość.