Lista nr 5 – ćwiczenia

Komentarz: Celem tej listy jest podanie wielomianowych transformacji poniższych problemów do dwóch klasycznych problemów optymalizacyjnych, tj. zagadnienia najtańszego przepływu lub zagadnienie najkrótszej ścieżki w grafie.

1. (Ahuja i inni, 1993) Pewna firma budowlana w swoim nowym projekcie będzie potrzebować stalowych belek o n różnych długościach, $L_1 < L_2 < \cdots < L_n$. Firma zgłasza zapotrzebowanie $D_i > 0$ dla każdej długości L_i, $i = 1, \dots, n$, gdzie D_i jest daną liczbą potrzebnych belek o długości L_i. Firma może zakupić i magazynować wszystkie potrzebne belki o różnych długościach. Jest to jednak nieekonomiczne rozwiązanie, ponieważ wymaga budowy n magazynów dla belek o tej samej długości L_i, $i = 1, \dots, n$. Alternatywnym rozwiązaniem jest zakup i magazynowanie stalowych belek o wybranych długościach. Wówczas jeśli firma potrzebuje belkę o długości L_i, której nie ma w magazynie, wyciąga z magazynu dłuższą belkę i przycina do wymaganej długości L_i. Niech K_i będzie danym kosztem budowy magazynu do przechowywania stalowych belek o długości L_i, $i = 1, \dots, n$, niech C_i będzie danym kosztem belki o długości L_i, $i = 1, \dots, n$.

   Które długości belek należy zakupić i przechowywać w magazynie, aby zminimalizować całkowity koszt budowy magazynów i zakupu belek zapewniając zapotrzebowania $D_1, D_2, \dots, D_n$ na belki o długościach, odpowiednio, $L_1, L_2, \dots, L_n$?

   Wsk. Sformułować problem jako zagadnienie najkrótszej ścieżki w acyklicznym grafie, gdzie wierzchołki odpowiadają różnym długościom belek, $L_1, L_2, \dots, L_n$.

2. (Ahuja i inni, 1993) Rozważmy n elementowy zbiór liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ uporządkowany niemalejąco. Chcemy podzielić ten zbiór na rozłączne podzbiory (grupy) takie, że (1) każdy podzbiór zawiera co najmniej p liczb; (2) każdy podzbiór zawiera kolejne liczby z $a_1, a_2, \dots, a_n$; (3) suma kwadratów odchyleń liczb z podzbiorów od średnich w podzbiorach jest najmniejsza. $\overline{a}(S) = (\sum_{i \in S} a_i)/|S|$ oznacza średnią podzbioru S. Jeśli a_k należy do podzbioru S, $(a_k - \overline{a}(S))^2$ jest kwadratem odchylenia a_k od średniej podzbioru S.

   Wsk. Sformułować problem jako zagadnienie najkrótszej ścieżki w acyklicznym grafie - podobnie jak w zad. 1.

3. Firma SUN OIL wydobywa ropę w dwóch szybach A i B o wydajnościach wynoszących, odpowiednio, 200000 ton i 150000 ton dziennie. Zaopatruje dwóch klientów X i Y, których dzienny popyt wynosi, odpowiednio, 160000 ton i 140000 ton. Ropa może być transportowana bezpośrednio do klientów lub też może być transportowana do portów G lub M, skąd dalej tankowcami do X i Y. Koszty transportu 1000 ton ropy podano w tabeli:

	Skąd					
Skąd	A	B	G	M	X	Y
A	0	-	10	13	25	28
B	-	0	15	12	25	25
G	-	-	0	6	16	17
M	-	-	6	0	14	16
X	-	-	-	-	0	15
Y	-	-	-	-	15	0

(a) Wyznacz optymalny plan transportu ropy.

Wsk. Sformułować problem jako zagadnienie najtańszego (minimalnego) przepływu w sieci.

(b) Jak w a) przy założeniu, że przed wysłaniem do klientów ropa musi być przetworzona w rafineriach G lub M. Koszty rafinacji ropy w G i M wynoszą odpowiednio 12 i 10 jednostek za 1000 ton, zdolności przetwórcze rafinerii są nieograniczone.

Wsk. Zmodyfikować zagadnienie najtańszego przepływu z a).

(c) Jak w b) przy założeniu, że zdolności przetwórcze rafinerii G i M są ograniczone i wynoszą, odpowiednio, 180000 ton i 150000 ton.

4. (Ahuja i inni, 1993) Dane mamy K okresów (momentów), $j = 1\dots,K$. W każdym okresie określone jest zapotrzebowanie $d_j \geqslant 0$, $j = 1\dots,K$, na produkt (jednostkach). Zapotrzebowanie d_j (jednostek) na produkt w każdym okresie może być zaspakajane przez produkcję x_j (jednostek) produktu lub/i przez pobranie I_{j-1} (jednostek) produktu z poprzedniego okresu $j-1$, pobranie z magazynu. Jeżeli zapotrzebowanie d_j nie może być w pełni zaspokojone w danym okresie j, wówczas brakujące jednostki produktu uzupełniane są przez produkcję w przyszłych okresach (backordering). B_{j+1} jest liczbą brakujących jednostek produktu, w okresie j, przeniesionych z okresu $j+1$ (z przyszłości) do okresu j - przeniesienie takie obarczamy dużym kosztem (karą). c^I_{j-1}, $j = 2,\dots,K$, jest danym kosztem przeniesienia jednostki produktu z okresu $j-1$ do okresu j (koszt pobrania z magazynu), c^B_{j+1}, $j = K-1,\dots,1$, jest danym kosztem (karą) przeniesienia jednostki produktu z okresu $j+1$ do okresu j. Ponadto dane są również ograniczenia u_j na wielkość produkcji w każdym okresie j, $j = 1,\dots,K$ oraz jednostkowy koszt produkcji c^P_j produktu.

   Wyznaczyć plan produkcji produktu w każdym okresie, wielkość magazynowania i wielkość ewentualnego uzupełniania produktu, tak aby zminimalizować całkowity koszt produkcji, magazynowania i uzupełniania. Zakładamy, że $\sum_{j=1}^{K} u_j \geqslant \sum_{j=1}^{K} d_j$.

   Wsk. Sformułować problem jako zagadnienie najtańszego (minimalnego) przepływu w sieci, gdzie wierzchołki w sieci odpowiadają okresom.

5. (Ahuja i inni, 1993) Firma lotnicza używa samolotu o pojemności p pasażerów na pewnej trasie. Podczas lotu na tej trasie samolot odwiedza kolejno miasta $1, 2\dots,n$. Samolot zabiera pasażerów w dowolnym mieście i wysadza w dowolnym mieście. b_{ij} jest daną liczbą pasażerów w mieście i chcących polecieć do miasta j, $i = 1,\dots,n-1$, $j = i+1,\dots,n$. Natomiast f_{ij} jest opłatą za przelot (za jednego pasażera) z miasta i do j. Wyznaczyć liczby pasażerów jakie powinien samolot zabrać w poszczególnych miastach (nie musi zabrać wszystkich pasażerów chcących polecieć) tak, aby zawieść ich do miast docelowych, nie przekroczyć pojemności samolotu i zmaksymalizować całkowity zysk z przewozów.

   Wsk. Sformułować problem jako zagadnienie najtańszego (minimalnego) przepływu w sieci, gdzie wierzchołki w sieci odpowiadają, między innymi, miastom.

6. Sformułować problem jako zagadnienie najtańszego (minimalnego) przepływu w sieci problem z zadania nr 2 z laboratoryjnej listy nr 1.