Lista nr 6 – ćwiczenia

1. (Ahuja i inni, 1993) Rozważmy problem programowania całkowitoliczbowego

$$-2x - 3y \to \min$$

przy ograniczeniach:

$$x + 4y \leqslant 5,$$
$$x, y \in \{0, 1\},$$

i jego relaksację Lagrange'a ($\mu = 1$)

$$-2x - 3y + (x + 4y - 5) \to \min$$

przy ograniczeniach:

$$x, y \in \{0, 1\}.$$

Pokać, że $x = 1, y = 0$ rozwiązuje zrelaksowany problem i jest rozwiązaniem dopuszczalnym oryginalnego problem (przed relaksacją), ale nie jest rozwiązaniem optymalnym oryginalnego problemu.

Jaki dodatkowy warunek powinno spełniać rozwiązanie optymalne zrelaksowanego problemu będące dopuszczalnym rozwiązaniem oryginalnego problemu, aby było optymalnym rozwiązaniem oryginalnego problemu?

2. (Ahuja i inni, 1993) Rozważmy problem z ograniczeniami typu "$\leqslant$": $\min\{c^T x : Ax \leqslant b, x \in \mathbb{X}\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Sprowadzić problem do problemu z ograniczeniami typu "$=$" przez wprowadzenie zmiennych uzupełniających $s_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$.

   (a) Zastosuj relaksację Lagrange'a do problemu z ograniczeniami typu "$=$" i sformułuj dla niego problem mnożników Lagrange'a.

   (b) Pokać, że jeśli pewne μ_i jest takie, że $\mu_i < 0$, to $L(\mu) = -\infty$. Ponadto, pokać, że jeśli pewne μ_i jest takie, że $\mu_i > 0$, to dla optymalnego rozwiązania problemu Lagrange'a $L(\mu)$ zmienna uzupełniająca $s_i = 0$.

   (c) Wywnioskuj z (b), że problem mnożników Lagrange'a dla problemu z ograniczeniami typu "$\leqslant$" jest postaci: $\max_{\mu \geqslant 0} L(\mu)$, gdzie $L(\mu) = \min\{c^T x + \mu^T(Ax - b) : x \in \mathbb{X}\}$.

3. (Ahuja i inni, 1993) Zastosujmy Lagrange'a do problemu programowania liniowego $\mathcal{P}$ zdefiniowanego: $\min\{c^T x : Ax = b, x \geqslant 0\} = \min\{c^T x : -Ax = -b, x \geqslant 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dokonując relaksacji $Ax = b$. Funkcja Lagrange'a jest postaci $L(\mu) = \min_{x \geqslant 0}\{c^T x - \mu^T(Ax - b)\} = \min_{x \geqslant 0}\{(c^T - \mu^T A)x + \mu^T b)\}$.

Rozważmy problem mnożników Lagrange'a $\max_\mu L(\mu)$.

   (a) Przypuśćmy, że wybierzemy wartości wektora μ tak, że dla pewnego j, $j = 1, \ldots, n$, $(c^T - \mu^T A)_j < 0$. Pokać, że $L(\mu) = -\infty$.

   (b) Przypuśćmy, że wybierzemy wartości wektora μ tak, że dla pewnego j, $j = 1, \ldots, n$, $(c^T - \mu^T A)_j > 0$. Pokać, że w optymalnym rozwiązaniu problemu Lagrange'a $L(\mu)$ $x_j = 0$.

(c) Korzystając z (a) i (b) pokać, że problem mnożników Lagrange'a jest równoważny problemowi dualnemu do problemu $\mathcal{P}$, tj. problemowi: $\min\{\mu^T b : \mu^T A \leqslant c^T\}$.

4. (Ahuja i inni, 1993) Rozważmy uogólnione zagadnienie przydziału sformułowane za pomocą programowania całkowitoliczbowego (zob. wykład)

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \text{ dla } i \in I \tag{1}$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_{ij} \leqslant d_j \text{ dla } j \in J \tag{2}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i \in I, j \in J. \tag{3}$$

(a) Porównaj dolne ograniczenia otrzymane za pomocą dwóch relaksacji Lagrange'a względem ograniczeń (1) i (2) (zob. wykład). Która relaksacja daje lepsze dolne ograniczenie i dlaczego?

(b) Porównaj optymalne wartości funkcji celu w problemach mnożników Lagrange'a dla dwóch relaksacji Lagrange'a względem ograniczeń (1) i (2) z dolnym ograniczeniem otrzymanym w wyniku relaksacji za pomocą liniowego programowania, relaksacja względem ograniczeń (3).