Metody optymalizacji
Wykład nr 1

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska

Problemy optymalizacyjne

Problemy optymalizacyjne możemy podzielić na:

- problemy optymalizacyjne, których zmienne decyzyjne są ciągłe (zmienne decyzyjne o ciągłych dziedzinach) – problemy optymalizacyjne ciągłe,
- problemy optymalizacyjne, których zmienne decyzyjne są dyskretne (zmienne decyzyjne o dyskretnych dziedzinach) – problemy optymalizacyjne dyskretne.

Problemy optymalizacyjne...

Definicja

Egzemplarz problemu optymalizacyjnego, oznaczonego przez $\mathcal{I}$, *jest parą* $(\mathbb{X}, f)$, *gdzie* $\mathbb{X}$ *jest zbiorem rozwiązań dopuszczalnych, natomiast* f *jest funkcją celu (kosztu),*

$$f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}.$$

Zatem, szukamy rozwiązania dopuszczalnego $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$, *takiego, że* $f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{y})$ *dla wszystkich* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}$, *czyli:*

$$f(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}} f(\boldsymbol{y}).$$

Rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ *jest rozwiązaniem globalnie optymalnym dla egzemplarza* $\mathcal{I}$ *lub po prostu rozwiązaniem optymalnym.*

Problemy optymalizacyjne...

Definicja

Problem optymalizacyjny jest zbiorem egzemplarzy problemu optymalizacyjnego – jest kolekcją egzemplarzy.

Minimalne drzewo rozpinające (MST)

MINIMUM SPANNING TREE:

Dane: Graf nieskierowany spójny $G = (V, E)$, gdzie V jest zbiorem wierzchołków, $|V| = n$, E jest zbiorem krawędzi, $|E| = m$, koszty krawędzi $c_e \in \mathbb{Z}_+$, $e \in E$. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest następującej postaci:

$$\mathbb{X} = \{T = (V, E') \ : \ E' \subseteq E, T \text{ jest spójny i acykliczny}\}.$$

Funkcja celu (kosztu) $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Z}_+$, $f(T) = \sum_{e \in T} c_e$.

Wyjście: Drzewo rozpinające T^* takie, że

$$f(T^*) = \min_{T \in \mathbb{X}} f(T).$$

Liniowe programowanie (LP)

LINEAR PROGRAMMING:

Dane: liczba wierszy (ograniczeń) m, liczba kolumn (zmiennych decyzyjnych) n, wektor prawych stron $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, wektor współczynników funkcji celu $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, macierz ograniczeń $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest następującej postaci:

$$\mathbb{X} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}.$$

Funkcja celu (kosztu) $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \sum_{j \in [n]} c_j x_j$,

Wyjście: Rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^*$ takie, że

$$f(\boldsymbol{x}^*) = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} f(\boldsymbol{x}).$$

Egzemplarze problemów

Egzemplarz problemu liniowego programowania:
$m = 1$, $n = 3$, $\boldsymbol{A} = [1, 1, 1]$, $\boldsymbol{b} = [2]$, $\boldsymbol{c}^T = [c_1, c_2, c_3]^T$,

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \rightarrow \min$$
$$\mathbb{X} = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 & \end{cases}$$

Egzemplarz minimalnego drzewa rozpinającego:
dane są: graf pełny o trzech wierzchołkach $n = 3$, $m = 3$, koszty krawędzi c_{12}, c_{13}, c_{23}.
Egzemplarz problemu wyrażony za pomocą programowania liniowego:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \rightarrow \min$$
$$\mathbb{X} = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ x_1 \leqslant 1, x_2 \leqslant 1, x_3 \leqslant 1 & \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 & \end{cases}$$

gdzie $c_1 = c_{12}$, $c_2 = c_{13}$, $c_3 = c_{23}$.

Otoczenie

Dla danego rozwiązania $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ otoczenie jest zbiorem rozwiązań dopuszczalnych, które leżą "blisko" $\boldsymbol{x}$.

Definicja

Dla dowolnego problemu optymalizacyjnego, będącego zbiorem egzemplarzy $(\mathbb{X}, f)$, *otoczenie jest odwzorowaniem*

$$N : \mathbb{X} \rightarrow 2^{\mathbb{X}}$$

zdefiniowanym dla każdego egzemplarza.

Otoczenie

Jeżeli $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, wówczas otoczenie można definiować np. za pomocą normy euklidesowej $\|\cdot\|_2$.
Dla programowania liniowego możemy podać następujące otoczenie:

$$N_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \ : \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leqslant \epsilon\}.$$

Dla minimalnego drzewa rozpinającego otoczenie można zdefiniować w następujący sposób:

$$N(T) = \{T' \in \mathbb{X} : T' \text{ jest otrzymany z } T \text{ następująco}$$
$$\text{dodaj krawędź } e \text{ do } T$$
$$\text{powstaje cykl } C$$
$$\text{usuń dowolną krawędź z } C$$
$$\text{różną od } e\}.$$

Lokalne i globalne optimum

Definicja

Dla danego egzemplarza $(\mathbb{X}, f)$ problemu optymalizacyjnego i otoczenia N, rozwiązanie $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ jest nazywane optimum lokalnym (minimum lokalnym) względem otoczenia N, jeśli

$$f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{y}) \text{ dla wszystkich } \boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{x}).$$

Definicja

Dany jest problem optymalizacyjny, zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ i otoczenie N. Mówimy, że otoczenie N jest dokładne (ang. exact), jeśli optimum lokalne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ względem N jest również optimum globalnym.

UWAGA: Otoczenie minimalnego drzewa rozpinającego jest dokładne.

Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe

Definicja

Dowolnych punktów $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$*, punkt postaci*

$$\boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda)\boldsymbol{y}, \quad \lambda \in [0, 1]$$

nazywamy wypukłą kombinacją $\boldsymbol{x}$ *i* $\boldsymbol{y}$*.*
Jeśli $\lambda \in (0, 1)$*,* $\boldsymbol{z}$ *nazywamy ścisłą wypukłą kombinacją* $\boldsymbol{x}$ *i* $\boldsymbol{y}$*.*

Definicja

Zbiór $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ *jest wypukły, jeśli zawiera wszystkie wypukłe kombinacje par punktów* $\boldsymbol{x}$ *i* $\boldsymbol{y}$ *należących do* $\mathbb{U}$*.*

UWAGA: Zbiór $\mathbb{R}^n$ jest wypukły. Każdy przedział jest wypukły.

Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe...

Lemat (o przekroju zbiorów wypukłych)

Przekrój zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

Dowód.

Oczywisty. □

Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe...

Definicja

Niech $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym. Funkcja $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ jest wypukła w zbiorze $\mathbb{U}$, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{U}$ zachodzi nierówność:

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leqslant \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Jeśli $\mathbb{U} = \mathbb{R}^n$, to mówimy, że f jest wypukła.

UWAGA: Dowolna liniowa funkcja jest wypukła w dowolnym zbiorze wypukłym $\mathbb{U}$.

Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe...

Lemat (o ograniczeniu wypukłym)

Niech f, $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$, będzie funkcją wypukłą w zbiorze $\mathbb{U}$. Wtedy dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zbiór

$$\mathbb{U}_t = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{U} \;:\; f(\boldsymbol{x}) \leqslant t\}$$

jest wypukły.

Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe...

Dowód.

Niech $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ będą dowolnymi punktami $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{U}_t$. Zatem $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$. Z wypukłości $\mathbb{U}$ mamy, że $\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$, $\lambda \in [0, 1]$. Ponieważ f jest wypukła w $\mathbb{U}$ następujące nierówności są prawdziwe:

$$f(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \leqslant \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}) \leqslant \lambda t + (1-\lambda)t = t.$$

Stąd $\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in \mathbb{U}_t$. $\square$

Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe...

Definicja

Niech $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym. Funkcja $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ jest wklęsła w zbiorze $\mathbb{U}$, jeśli $-f$ jest wypukła w zbiorze $\mathbb{U}$.

UWAGA: Dowolna liniowa funkcja jest wklęsła w dowolnym zbiorze wypukłym $\mathbb{U}$.

Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe...

Twierdzenie (Charakteryzacja funkcji wypukłej - gradient)

Niech $f \in C^1$ (f ma ciągłe pochodne cząstkowe) w otwartym zbiorze zawierającym $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Wtedy f jest wypukła w zbiorze $\mathbb{U}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(\boldsymbol{y}) \geqslant f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$

dla wszystkich $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$, gdzie $\nabla f(\boldsymbol{x})$ jest gradientem w punkcie $\boldsymbol{x}$.

Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe...

Dowód.

($\Rightarrow$) Niech $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$. Wtedy dla każdego $\lambda \in (0, 1]$

$$f(\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) = f(\lambda \boldsymbol{y} + (1 - \lambda)\boldsymbol{x}) \leqslant \lambda f(\boldsymbol{y}) + (1 - \lambda) f(\boldsymbol{x}).$$

Rozwijamy lewą stronę w szereg Taylor'a w $\boldsymbol{x}$

$$f(\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\eta)^T(\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\eta)^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\lambda,$$

gdzie η jest kombinacją wypukłą $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$. Zatem

$$f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\eta)^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\lambda \leqslant \lambda f(\boldsymbol{y}) + (1 - \lambda) f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda(f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}))$$
$$\nabla f(\eta)^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}).$$

Przechodząc do granicy $\lambda \to 0$, $\nabla f(\eta) \to \nabla f(\boldsymbol{x})$.

Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe...

Dowód.

($\Leftarrow$) $f(\boldsymbol{y}) \geqslant f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ zachodzi dla wszystkich $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$.
Niech $\boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda)\boldsymbol{y}$. Stąd

$$f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{z}) + \nabla f(\boldsymbol{z})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{z}) + \nabla f(\boldsymbol{z})^T(\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{x} - (1 - \lambda)\boldsymbol{y}),$$
$$f(\boldsymbol{y}) \geqslant f(\boldsymbol{z}) + \nabla f(\boldsymbol{z})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{z}) + \nabla f(\boldsymbol{z})^T(\boldsymbol{y} - \lambda \boldsymbol{x} - (1 - \lambda)\boldsymbol{y}).$$

Mnożąc przerwszą nierówność przez λ a drugą przez $1 - \lambda$ i dodając stronami otrzemujemy

$$\lambda f(\boldsymbol{x}) + (1 - \lambda) f(\boldsymbol{y}) \geqslant f(\boldsymbol{z}) = f(\lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda)\boldsymbol{y}).$$

Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe...

Twierdzenie (Charakteryzacja funkcji wypukłej - Hesjan)

Niech $f \in C^2$ (f ma ciągłe drugie pochodne cząstkowe) w otwartym zbiorze zawierającym $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Wtedy f jest wypukła w zbiorze $\mathbb{U}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\boldsymbol{s}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{s} \geqslant 0$$

dla wszystkich $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ i dla wszystkich $\boldsymbol{x} \in \mathbb{U}$ gdzie $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ jest Hesjanem w punkcie $\boldsymbol{x}$ (macierzą pochodnych cząstkowych).

Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe...

Dowód.

($\Leftarrow$) Niech $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$. Z twierdzenia Taylor'a

$$f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})^T \nabla^2 f(\eta)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}),$$

gdzie η jest kombinacją wypukłą $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$, stąd $\eta \in \mathbb{U}$.
Z założenia $\boldsymbol{s}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{s} \geqslant 0$, co daje

$$f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})^T \nabla^2 f(\eta) \geqslant f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}).$$

Zatem f jest wypukła. $\square$

Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe...

Dowód.

($\Rightarrow$) Niech $\boldsymbol{x} \in \mathbb{U}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ i niech $t > 0$ (małe), takie, że $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{s} \in \mathbb{U}$.
Rozwijając w szereg Taylora mamy

$$f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{s}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T t\boldsymbol{s} + \frac{1}{2} t^2 \boldsymbol{s}^T \nabla^2 f(\eta) \boldsymbol{s},$$

gdzie η jest kombinacją wypukłą $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{s}$ i $\boldsymbol{x}$.
Z założenia f jest wypukła, co daje

$$f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T t\boldsymbol{s} \leqslant f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{s}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T t\boldsymbol{s} + \frac{1}{2} t^2 \boldsymbol{s}^T \nabla^2 f(\eta) \boldsymbol{s}.$$

Stąd $\frac{1}{2} t^2 \boldsymbol{s}^T \nabla^2 f(\eta) \boldsymbol{s} \geqslant 0$. Dzieląc przez $t^2/2$ i przechodząc do granicy $t \to 0$ dostajemy $\nabla^2 f(\eta) \to \nabla^2 f(\boldsymbol{x})$.

Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe...

Twierdzenie (o otoczeniu dokładnym)

Niech $(f, \mathbb{X})$ będzie egzemplarzem problemu optymalizacyjnego, $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym a f będzie funkcją wypukłą. Wtedy otoczenie

$$N_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \; : \; \boldsymbol{y} \in \mathbb{X}, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 \leqslant \epsilon\}$$

jest dokładne dla dowolnego $\epsilon > 0$.

Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe...

Dowód.

Niech $\boldsymbol{x}$ będzie lokalnym optimum względem $N_\epsilon(\boldsymbol{x})$, $\epsilon > 0$, tj.

$$f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{z}) \text{ dla wszystkich } \boldsymbol{z} \in N_\epsilon(\boldsymbol{x}).$$

Pokażemy, że $f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{y})$ dla wszystkich $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}$. Oczywiście $N_\epsilon(\boldsymbol{x}) \subset \mathbb{X}$.
Wybierzmy dowolny $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X} \setminus N_\epsilon(\boldsymbol{x})$.
Z wypukłości $\mathbb{X}$ i z faktu, że $\epsilon > 0$ istnieje $\boldsymbol{z} \in N_\epsilon(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{x}$, taki, że

$$\boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \text{ dla pewnego } \lambda \in (0,1).$$

Z wypukłości f i lokalnej optymalności $\boldsymbol{x}$ mamy

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{z}) = f(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) &\leqslant \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}) \\ (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}) &\leqslant (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}), \text{ gdzie } \lambda \in (0,1) \\ f(\boldsymbol{x}) &\leqslant f(\boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

Programowanie wypukłe

Definicja

Egzemplarz $(f, \mathbb{X})$ problemu optymalizacyjnego jest egzemplarzem problemu programowania wypukłego, jeśli f jest funkcją wypukłą, zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zdefiniowany następująco:

$$g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant \boldsymbol{0}, \ \ i \in [m],$$

gdzie $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami wklęsłymi.

Programowanie wypukłe...

Lemat

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ w problemie programowania wypukłego jest wypukły.

Dowód.

Wynika z lematu (o graniczeniu wypukłym) i lematu (o przekroju zbiorów wypukłych). $\square$

Stąd i twierdzenia (o otoczeniu dokładnym) dostajemy:

Twierdzenie

W problemie programowania wypukłego każde rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ lokalnie optymalne względem otoczenia $N_\epsilon(\boldsymbol{x})$ jest globalnie optymalne.

Programowanie wypukłe

Twierdzenie

Niech $f : \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ w zbiorze wypukłym $\mathbb{X}$ i f jest wypukła w $\mathbb{X}$. Jeśli dla $\mathbf{x}^* \in \mathbb{X}$,

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0},$$

to $\mathbf{x}^*$ jest optymalny w $\mathbb{X}$.

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książki

Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz.
Combinatorial optimization: algorithms and complexity.
Dover Publications Inc., 1998.