„ZPR PWr – Zintegrowany Program Rozwoju Politechniki Wrocławskiej"

1 Problemy optymalizacyjne

Problemy optymalizacyjne możemy podzielić na:

- problemy optymalizacyjne, których zmienne decyzyjne są ciągłe (zmienne decyzyjne o ciągłych dziedzinach) – *problemy optymalizacyjne ciągłe*,
- problemy optymalizacyjne, których zmienne decyzyjne są dyskretne (zmienne decyzyjne o dyskretnych dziedzinach) – *problemy optymalizacyjne dyskretne*.

Definicja 1. *Egzemplarz problemu optymalizacyjnego, oznaczonego przez* $\mathcal{I}$*, jest parą* $(\mathbb{X}, f)$*, gdzie* $\mathbb{X}$ *jest zbiorem rozwiązań dopuszczalnych, natomiast* f *jest funkcją celu (kosztu),* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$*.*

Zatem, szukamy rozwiązania dopuszczalnego $\boldsymbol{x}$*,* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$*, takiego, że* $f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{y})$ *dla wszystkich* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}$*, czyli:*

$$f(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}} f(\boldsymbol{y}). \tag{1}$$

Rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ *jest rozwiązaniem* globalnie optymalnym *dla egzemplarza* $\mathcal{I}$ *lub po prostu* rozwiązaniem optymalnym*.*

W definicji 1 rozważaliśmy problem (1), który jest problem minimalizacyjnym. Definicja ta jest poprawna również dla problemów, w których maksymalizujemy funkcję na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.

Definicja 2. *Problem optymalizacyjny jest zbiorem egzemplarzy problemu optymalizacyjnego – jest kolekcją egzemplarzy.*

Innymi słowy, w egzemplarzu mamy dane wejściowe i wystarczającą ilość informacji, aby otrzymać rozwiązanie. Natomiast problem optymalizacyjny jest zbiorem takich egzemplarzy.

Rozważmy poniżej przykład egzemplarza problemu *minimalnego drzewa rozpinającego*.

Minimum Spanning Tree:

Dane: Graf nieskierowany spójny $G = (V, E)$, gdzie V jest zbiorem wierzchołków, $|V| = n$, E jest zbiorem krawędzi, $|E| = m$, koszty krawędzi $c_e \in \mathbb{Z}_+$, $e \in E$. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest następującej postaci:

$$\mathbb{X} = \{T = (V, E') \,:\, E' \subseteq E, T \text{ jest spójny i acykliczny}\}.$$

Funkcja celu (kosztu) $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Z}_+$, $f(T) = \sum_{e \in T} c_e$.

Wyjście: Drzewo rozpinające T^* takie, że $f(T^*) = \min_{T \in \mathbb{X}} f(T)$.

Przykład egzemplarza problemu *liniowego programowania LP*.
LINEAR PROGRAMMING:

Dane: liczba wierszy (ograniczeń) m, liczba kolumn (zmiennych decyzyjnych) n, wektor prawych stron $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, wektor współczynników funkcji celu $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, macierz ograniczeń $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest następującej postaci:

$$\mathbb{X} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}.$$

Funkcja celu (kosztu) $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \sum_{j \in [n]} c_j x_j$,

Wyjście: Rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^*$ takie, że $f(\boldsymbol{x}^*) = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} f(\boldsymbol{x})$.

$m = 1$, $n = 3$, $\boldsymbol{A} = [1, 1, 1]$, $\boldsymbol{b} = [2]$, $\boldsymbol{c}^T = [c_1, c_2, c_3]^T$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \min \\ \mathbb{X} &= \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 & \end{cases} \end{aligned}$$

Rozważmy egzemplarz minimalnego drzewa rozpinającego, tzn. dane są: graf pełny o trzech wierzchołkach $n = 3$, $m = 3$, koszty krawędzi c_{12}, c_{13}, c_{23}. Egzemplarz tego problemu optymalizacyjnego można wyrazić za pomocą następującego programowania liniowego:

$$\begin{aligned} & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \min \\ \mathbb{X} = & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ x_1 \leqslant 1, x_2 \leqslant 1, x_3 \leqslant 1 & \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 & \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie $c_1 = c_{12}$, $c_2 = c_{13}$, $c_3 = c_{23}$.

2 Otoczenie

Dla danego rozwiązania $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ otoczenie jest zbiorem rozwiązań dopuszczalnych, które leżą "blisko" $\boldsymbol{x}$.

Definicja 3. *Dla dowolnego problemu optymalizacyjnego, będącego zbiorem egzemplarzy* $(\mathbb{X}, f)$*, otoczenie jest odwzorowaniem* $N : \mathbb{X} \to 2^{\mathbb{X}}$ *zdefiniowanym dla każdego egzemplarza.*

Jeżeli $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, wówczas otoczenie można definiować np. za pomocą normy euklidesowej. Zatem dla programowania liniowego możemy podać następujące otoczenie

$$N_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \ : \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 \leqslant \epsilon\}.$$

W przypadku problemów optymalizacji dyskretnej wybór otoczenia zależy od struktury zbioru rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$. Dla minimalnego drzewa rozpinającego otoczenie można zdefiniować w następujący sposób (jest to najpopularniejsze otoczenie):

$$N(T) = \{T' \in \mathbb{X} : \begin{array}{l} T' \text{ jest otrzymany z } T \text{ następująco} \\ \text{dodaj krawędź } e \text{ do } T \\ \text{powstaje cykl } C \\ \text{usuń dowolną krawędź z } C \\ \text{różną od } e\}. \end{array} \tag{2}$$

3 Lokalne i globalne optimum

Definicja 4. *Dla danego egzemplarza* $(\mathbb{X}, f)$ *problemu optymalizacyjnego i otoczenia* N*, rozwiązanie* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ *jest nazywane optimum lokalnym (minimum lokalnym) względem otoczenia* N*, jeśli*

$$f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{y}) \text{ dla wszystkich } \boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{x}).$$

Definicja 5. *Dany jest problem optymalizacyjny, zbiór rozwiązań dopuszczalnych* $\mathbb{X}$ *i otoczenie* N*. Mówimy, że otoczenie* N *jest dokładne (ang. exact), jeśli optimum lokalne* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ *względem* N *jest również optimum globalnym.*

Otoczenie (2) dla minimalnego drzewa rozpinającego jest dokładne.

4 Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe

Definicja 6. *Dowolnych punktów* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$*, punkt postaci*

$$\boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda)\boldsymbol{y}, \quad \lambda \in [0, 1]$$

nazywamy wypukłą kombinacją $\boldsymbol{x}$ *i* $\boldsymbol{y}$*.*

Jeśli $\lambda \in (0, 1)$*,* $\boldsymbol{z}$ *nazywamy ścisłą wypukłą kombinacją* $\boldsymbol{x}$ *i* $\boldsymbol{y}$*.*

Definicja 7. *Zbiór* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ *jest wypukły, jeśli zawiera wszystkie wypukłe kombinacje par punktów* $\boldsymbol{x}$ *i* $\boldsymbol{y}$ *należących do* $\mathbb{U}$*.*

Zbiór $\mathbb{R}^n$ jest wypukły. Każdy przedział jest wypukły.

Lemat 1. *Przekrój zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.*

Dowód. Oczywisty. $\square$

Definicja 8. *Niech $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym. Funkcja $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ jest wypukła w zbiorze $\mathbb{U}$, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$ zachodzi nierówność:*

$$f(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \leqslant \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}), \quad \lambda \in [0,1].$$

Jeśli $\mathbb{U} = \mathbb{R}^n$, to mówimy, że f jest wypukła.

Dowolna liniowa funkcja jest wypukła w dowolnym zbiorze wypukłym $\mathbb{U}$.

Lemat 2. *Niech f, $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$, będzie funkcją wypukłą w zbiorze $\mathbb{U}$. Wtedy dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zbiór*

$$\mathbb{U}_t = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{U} \,:\, f(\boldsymbol{x}) \leqslant t\}$$

jest wypukły.

Dowód. Niech $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ będą dowolnymi punktami $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{U}_t$. Zatem $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$. Z wypukłości $\mathbb{U}$ mamy, że $\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$, $\lambda \in [0,1]$. Ponieważ f jest wypukła w $\mathbb{U}$ następujące nierówności są prawdziwe:

$$f(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \leqslant \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}) \leqslant \lambda t + (1-\lambda) t = t.$$

Stąd $\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in \mathbb{U}_t$. □

Definicja 9. *Niech $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym. Funkcja $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ jest wklęsła w zbiorze $\mathbb{U}$, jeśli $-f$ jest wypukła w zbiorze $\mathbb{U}$.*

Dowolna liniowa funkcja jest wklęsła w dowolnym zbiorze wypukłym $\mathbb{U}$.

Twierdzenie 1 (Charakteryzacja funkcji wypukłej - gradient)**.** *Niech $f \in C^1$ (f ma ciągłe pochodne cząstkowe) w otwartym zbiorze zawierającym $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Wtedy f jest wypukła w zbiorze $\mathbb{U}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(\boldsymbol{y}) \geqslant f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$

dla wszystkich $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$, gdzie $\nabla f(\boldsymbol{x})$ jest gradientem w punkcie $\boldsymbol{x}$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$. Wtedy dla każdego $\lambda \in (0,1]$

$$f(\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) = f(\lambda \boldsymbol{y} + (1-\lambda)\boldsymbol{x}) \leqslant \lambda f(\boldsymbol{y}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}).$$

Rozwijamy lewą stronę w szereg Taylor'a w $\boldsymbol{x}$

$$f(\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{\eta})^T (\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{\eta})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\lambda,$$

gdzie $\boldsymbol{\eta}$ jest kombinacją wypukłą $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$. Zatem

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{\eta})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\lambda &\leqslant \lambda f(\boldsymbol{y}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda(f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})) \\ \nabla f(\boldsymbol{\eta})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) &\leqslant f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy $\lambda \to 0$, $\nabla f(\boldsymbol{\eta}) \to \nabla f(\boldsymbol{x})$.

($\Leftarrow$) $f(\boldsymbol{y}) \geqslant f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ zachodzi dla wszystkich $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$. Niech $\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}$. Stąd

$$f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{z}) + \nabla f(\boldsymbol{z})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{z}) + \nabla f(\boldsymbol{z})^T(\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} - (1-\lambda)\boldsymbol{y}),$$
$$f(\boldsymbol{y}) \geqslant f(\boldsymbol{z}) + \nabla f(\boldsymbol{z})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{z}) + \nabla f(\boldsymbol{z})^T(\boldsymbol{y} - \lambda\boldsymbol{x} - (1-\lambda)\boldsymbol{y}).$$

Mnożąc przerwszą nierówność przez λ a drugą przez $1-\lambda$ i dodając stronami otrzemujemy

$$\lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}) \geqslant f(\boldsymbol{z}) = f(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}).$$

□

Twierdzenie 2 (Charakteryzacja funkcji wypukłej - Hesjan)**.** *Niech $f \in C^2$ (f ma ciągłe drugie pochodne cząstkowe) w otwartym zbiorze zawierającym $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Wtedy f jest wypukła w zbiorze $\mathbb{U}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\boldsymbol{s}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{s} \geqslant 0$$

dla wszystkich $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ i dla wszystkich $\boldsymbol{x} \in \mathbb{U}$ gdzie $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ jest Hesjanem w punkcie $\boldsymbol{x}$ (macierzą pochodnych cząstkowych).

Dowód. ($\Leftarrow$) Niech $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$. Z twierdzenia Taylor'a

$$f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})^T \nabla^2 f(\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}),$$

gdzie $\boldsymbol{\eta}$ jest kombinacją wypukłą $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$, stąd $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{U}$.

Z założenia $\boldsymbol{s}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{s} \geqslant 0$, co daje

$$f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})^T \nabla^2 f(\boldsymbol{\eta}) \geqslant f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}).$$

Stąd i twierdzenia 1 mamy, że f jest wypukła.

($\Rightarrow$) Niech $\boldsymbol{x} \in \mathbb{U}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ i niech $t > 0$ (małe), takie, że $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{s} \in \mathbb{U}$. Rozwijając w szereg Taylora mamy

$$f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{s}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T t\boldsymbol{s} + \frac{1}{2} t^2 \boldsymbol{s}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{s},$$

gdzie $\boldsymbol{\eta}$ jest kombinacją wypukłą $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{s}$ i $\boldsymbol{x}$.

Z założenia f jest wypukła. Zatem z twierdzenia 1 dostajemy:

$$f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T t\boldsymbol{s} \leqslant f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{s}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T t\boldsymbol{s} + \frac{1}{2} t^2 \boldsymbol{s}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{s}.$$

Stąd $\frac{1}{2} t^2 \boldsymbol{s}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{s} \geqslant 0$. Dzieląc przez $t^2/2$ i przechodząc do granicy $t \to 0$ dostajemy $\nabla^2 f(\boldsymbol{\eta}) \to \nabla^2 f(\boldsymbol{x})$. □

Twierdzenie 3. *Niech* $(f, \mathbb{X})$ *będzie egzemplarzem problemu optymalizacyjnego,* $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ *będzie zbiorem wypukłym a* f *będzie funkcją wypukłą. Wtedy otoczenie*

$$N_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \,:\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{X}, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 \leqslant \epsilon\}$$

jest dokładne dla dowolnego $\epsilon > 0$.

Dowód. Niech $\boldsymbol{x}$ będzie lokalnym optimum względem $N_\epsilon(\boldsymbol{x})$, $\epsilon > 0$, tj.

$$f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{z}) \text{ dla wszystkich } \boldsymbol{z} \in N_\epsilon(\boldsymbol{x}).$$

Pokażemy, że $f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{y})$ dla wszystkich $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}$. Oczywiście $N_\epsilon(\boldsymbol{x}) \subset \mathbb{X}$. Jeśli $N_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \mathbb{X}$, to $\boldsymbol{x}$ jest optimum globalnym w $\mathbb{X}$.

Zatem wybierzmy dowolny $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X} \setminus N_\epsilon(\boldsymbol{x})$. Z wypukłości $\mathbb{X}$ i z faktu, że $\epsilon > 0$ istnieje $\boldsymbol{z} \in N_\epsilon(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{x}$, taki, że $\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}$ dla pewnego $\lambda \in (0,1)$. Z wypukłości f i lokalnej optymalności $\boldsymbol{x}$ mamy

$$f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{z}) = f(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \leqslant \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}).$$

Porządkując dostajemy:

$$\begin{aligned} (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}) &\leqslant (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}), \text{ gdzie } \lambda \in (0,1) \\ f(\boldsymbol{x}) &\leqslant f(\boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

□

Definicja 10. *Egzemplarz* $(f, \mathbb{X})$ *problemu optymalizacyjnego jest egzemplarzem problemu programowania wypukłego, jeśli* f *jest funkcją wypukłą, zbiór rozwiązań dopuszczalnych* $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ *jest zdefiniowany następująco:*

$$g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant \boldsymbol{0}, \ i \in [m],$$

gdzie $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *są funkcjami wklęsłymi.*

Lemat 3. *Zbiór rozwiązań dopuszczalnych* $\mathbb{X}$ *w problemie programowania wypukłego jest wypukły.*

Dowód. Wynika z lematu 2 i lematu 1. □

Z lematu 3 i twierdzenia 3 dostajemy bardzo ważną własność programowania wypukłego.

Twierdzenie 4. *W problemie programowania wypukłego każde rozwiązanie* $\boldsymbol{x}$ *lokalnie optymalne względem otoczenia* $N_\epsilon(\boldsymbol{x})$ *jest globalnie optymalne.*

Twierdzenie 5. *Niech* $f : \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ *w zbiorze wypukłym* $\mathbb{X}$ *i* f *jest wypukła w* $\mathbb{X}$. *Jeśli dla* $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{X}$,

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0},$$

to $\boldsymbol{x}^*$ *jest optymalny w* $\mathbb{X}$.

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książki [1].

Literatura

[1] Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz. *Combinatorial optimization: algorithms and complexity.* Dover Publications Inc., 1998.