Metody optymalizacji
Wykład nr 10

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska

Metody programowania całkowitoliczbowego

Wyróżnia się kilka podejść do rozwiązywania zagadnień programowania całkowitoliczbowego:

- metody przeglądu, m.in. metody podziału i ograniczeń,
- metody płaszczyzn odcinających,
- metody oparte na dekompozycji.

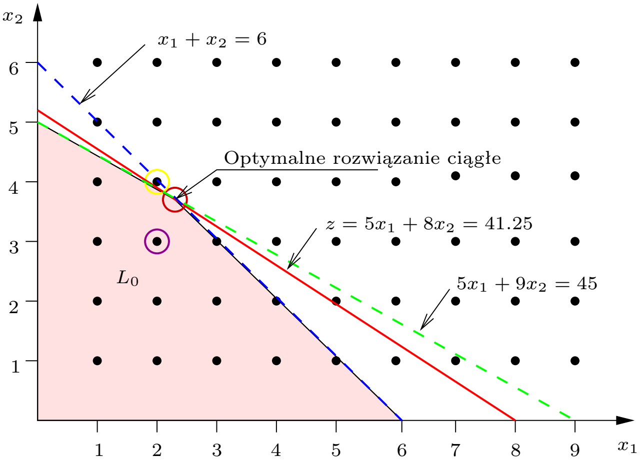
Rozwiązanie PCL za pomocą programowania liniowego (LP)

$$z^* = \max z = 5x_1 + 8x_2$$

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \leqslant & 6 \\ 5x_1 & + & 9x_2 & \leqslant & 45 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ i całkowite}$$

Rozwiązanie PCL za pomocą programowania liniowego (LP)



Rozwiązanie PCL za pomocą (LP)

	Rozwiązanie optymalne ciągłe	Rozwiązanie zaokrąglone	Rozwiązanie najbliższe całkowite	Rozwiązanie optymalne całkowite
x_1	$\frac{9}{4} = 2.25$	2	2	**0**
x_2	$\frac{15}{4} = 3.75$	4	3	**5**
z	41.25	niedopuszcz.	34	**40**

Metoda podziału i ograniczeń dla PCL

Metoda podziału i ograniczeń jest oparta na podejściu “dziel i zwyciężaj”.
Kluczowe fakty:

PCL= **LP** + ograniczenia całkowitoliczbowości

Metoda podziału i ograniczeń dla PCL

Metoda podziału i ograniczeń jest oparta na podejściu “dziel i zwyciężaj”. Kluczowe fakty:

PCL= **LP** + ograniczenia całkowitoliczbowości

Fakt 1. Wartość optymalna funkcji celu **LP** jest górnym ograniczeniem (maksymalizacja funkcji celu) optymalnej wartości funkcji celu **PCL**.

Metoda podziału i ograniczeń dla PCL

Metoda podziału i ograniczeń jest oparta na podejściu “dziel i zwyciężaj”. Kluczowe fakty:

PCL= **LP** + ograniczenia całkowitoliczbowości

Fakt 1. Wartość optymalna funkcji celu **LP** jest górnym ograniczeniem (maksymalizacja funkcji celu) optymalnej wartości funkcji celu **PCL**.

Fakt 2. Wartość funkcji celu **PCL** dla dowolnego rozwiązania całkowitoliczbowego jest dolnym ograniczeniem (maksymalizacja funkcji celu) optymalnej wartości funkcji celu **PCL**.

Rozwiązanie PCL za pomocą (LP)

Pomijamy warunki całkowitoliczbowości i rozwiązujemy następujące zagadnienie **LP**

$$z^* = \max z = 5x_1 + 8x_2$$

$$L_0 = \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie PCL za pomocą (LP)

Pomijamy warunki całkowitoliczbowości i rozwiązujemy następujące zagadnienie **LP**

$$z^* = \max z = 5x_1 + 8x_2$$

$$L_0 = \begin{cases} x_1 \quad + \quad x_2 \quad \leqslant \quad 6 \\ 5x_1 \quad + \quad 9x_2 \quad \leqslant \quad 45 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Otrzymujemy: $x_1 = 2\frac{1}{4}$, $x_2 = 3\frac{3}{4}$, $z^0 = 41\frac{1}{4}$ oraz górne ograniczenie

$$z^* \leqslant 41\frac{1}{4}.$$

Rozwiązanie PCL za pomocą (LP)

Pomijamy warunki całkowitoliczbowości i rozwiązujemy następujące zagadnienie **LP**

$$z^* = \max z = 5x_1 + 8x_2$$

$$L_0 = \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Otrzymujemy: $x_1 = 2\frac{1}{4}$, $x_2 = 3\frac{3}{4}$, $z^0 = 41\frac{1}{4}$ oraz górne ograniczenie

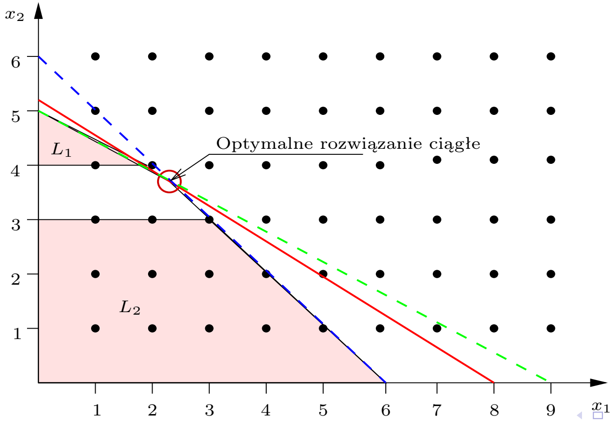
$$z^* \leqslant 41\frac{1}{4}.$$

Ponieważ współczynniki funkcji celu są całkowitoliczbowe, możemy poprawić górne ograniczenie

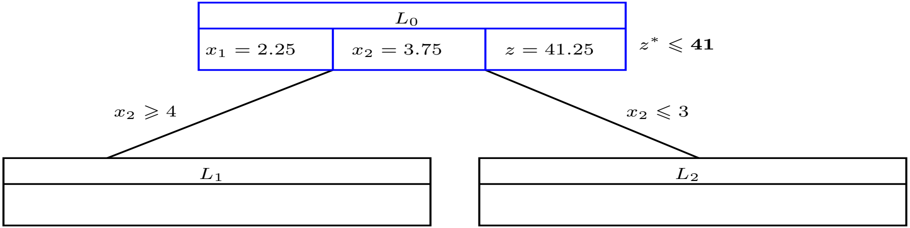
$$z^* \leqslant 41.$$

Metoda podziału i ograniczeń dla PCL

Wybieramy zmienną decyzyjną o wartości ułamkowej np. x_2 – wybór jest heurystyczny (możemy wybrać również x_1). Narzucamy warunki, $x_2 \leqslant 3$ lub $x_2 \geqslant 4$, wykluczające przedział $(3, 4)$.



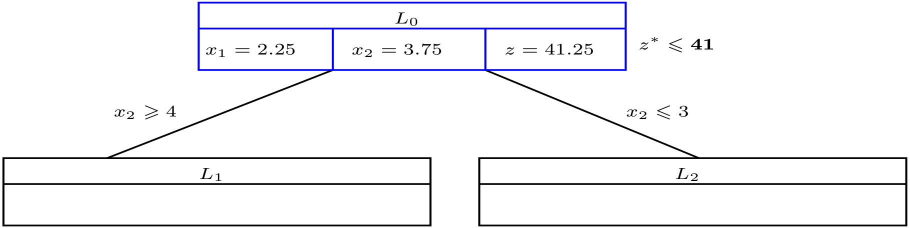
Metoda podziału i ograniczeń dla PCL



$$L_1 = \begin{cases} \max z = 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ x_2 \geqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$L_2 = \begin{cases} \max z = 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Metoda podziału i ograniczeń dla PCL



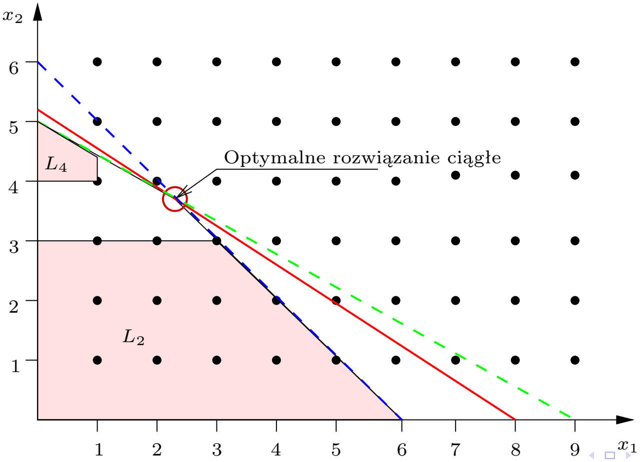
$$\max z = 5x_1 + 8x_2 \qquad \max z = 5x_1 + 8x_2$$

$$L_1 = \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ \color{red}{x_2 \geqslant 4} \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ \color{red}{x_2 \leqslant 3} \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

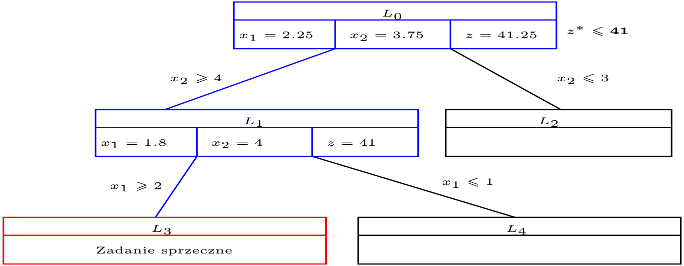
Wybór węzła L_1 czy L_2 jest heurystyczny. Rozpatrzmy L_1. Otrzymujemy: $x_1 = 1.8$, $x_2 = 4$, $z = 41$.

Metoda podziału i ograniczeń dla PCL

Wybieramy zmienną decyzyjną o wartości ułamkowej x_1 Narzucamy warunki, $x_1 \leqslant 1$ lub $x_1 \geqslant 2$, wykluczające przedział $(1, 2)$.



Metoda podziału i ograniczeń dla PCL



$$L_3 = \left\{ \begin{array}{l} \max z = 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ x_2 \geqslant 4 \\ {\color{red} x_1 \geqslant 2} \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{array} \right.$$

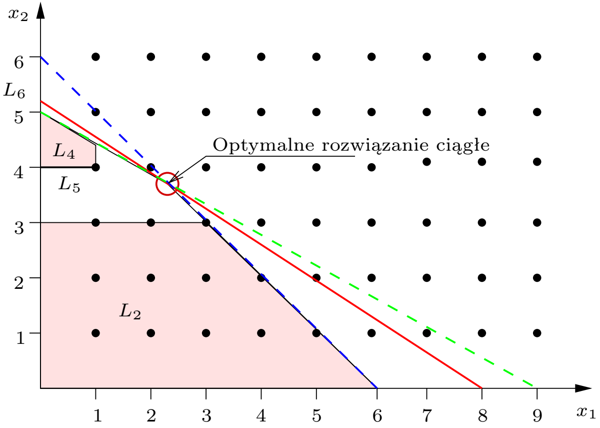
$$L_4 = \left\{ \begin{array}{l} \max z = 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ x_2 \geqslant 4 \\ {\color{red} x_1 \leqslant 1} \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{array} \right.$$

sprzeczne

$$x_1 = 1, x_2 = 4\frac{4}{9}, z = 40\frac{5}{9}$$

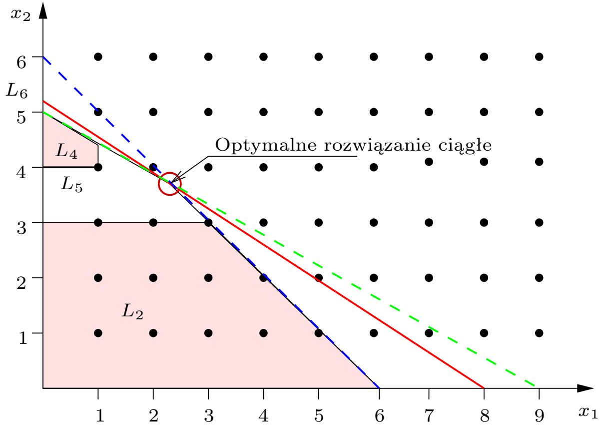
Metoda podziału i ograniczeń dla PCL

Wybieramy zmienną decyzyjną o wartości ułamkowej x_2 Narzucamy warunki, $x_2 \leqslant 4$ lub $x_2 \geqslant 5$, wykluczające przedział $(4, 5)$.



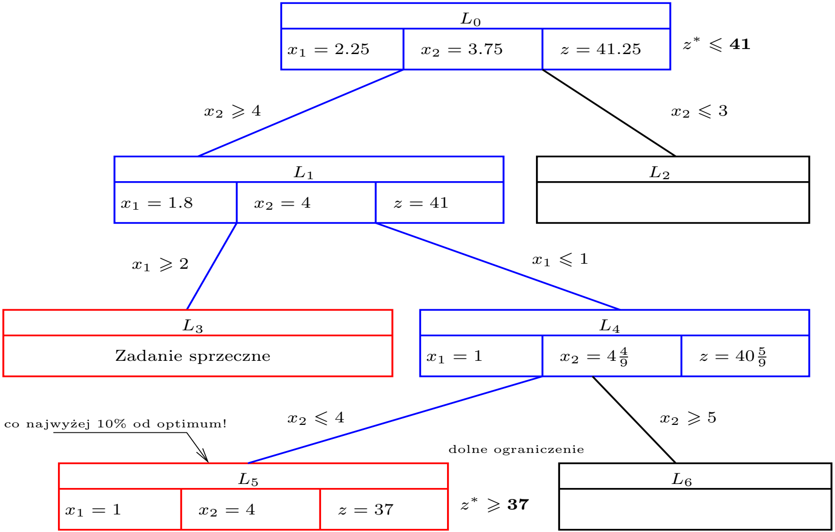
Metoda podziału i ograniczeń dla PCL

Wybieramy zmienną decyzyjną o wartości ułamkowej x_2 Narzucamy warunki, $x_2 \leqslant 4$ lub $x_2 \geqslant 5$, wykluczające przedział $(4, 5)$.

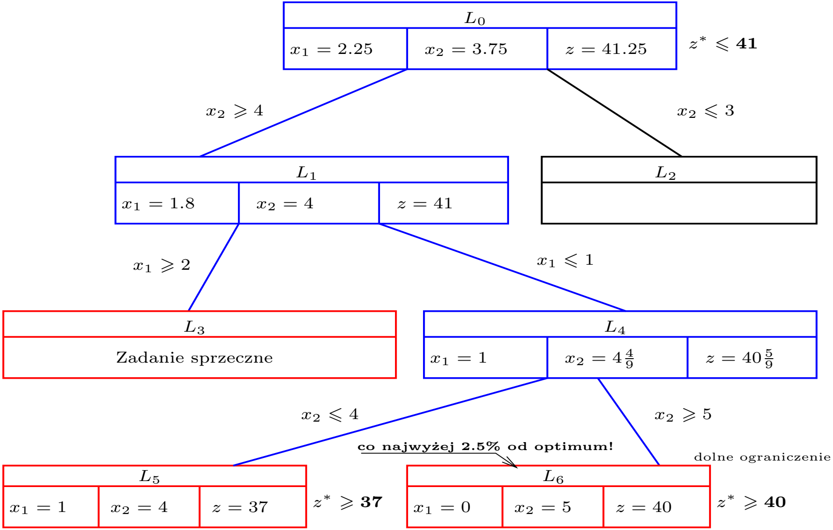


Rozpatrujemy L_5.

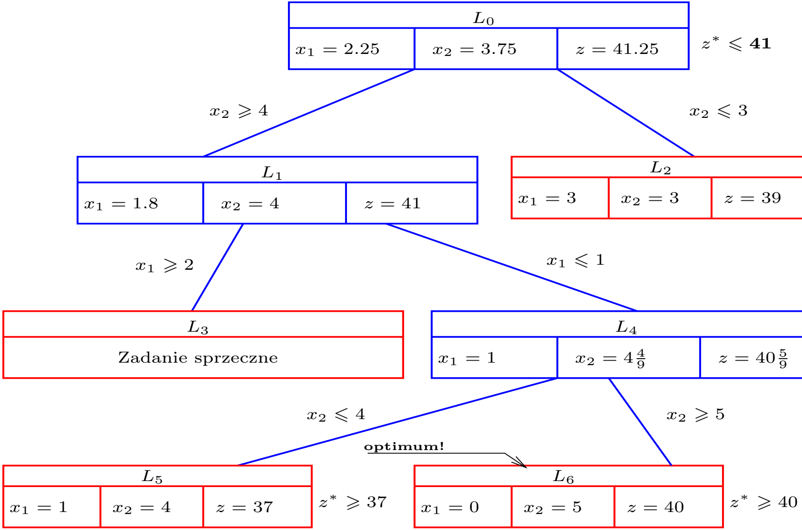
Metoda podziału i ograniczeń dla PCL



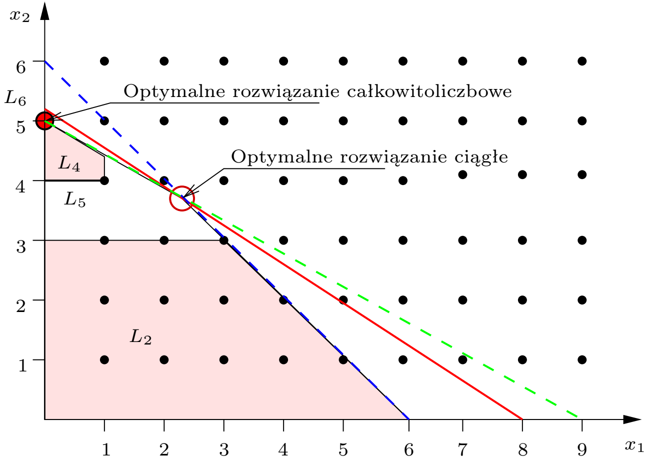
Metoda podziału i ograniczeń dla PCL



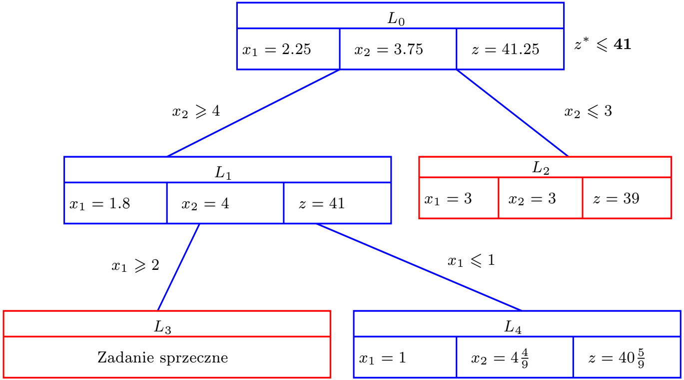
Metoda podziału i ograniczeń dla PCL



Metoda podziału i ograniczeń dla PCL



Czy można poprawić górne ograniczenie?



Załóżmy, że w naszym przykładzie rozpatrujemy węzeł L_2 przed L_5 lub L_6. Optymalne rozwiązanie leży w L_2 lub L_4. Stąd z^* jest ograniczone przez $40\frac{5}{9}$. Ponieważ współczynniki funkcji celu są całkowitoliczbowe, możemy poprawić górne ograniczenie na 40.

Podsumowanie

Załóżmy rozpatrzyliśmy węzeł L_j. Nie ma sensu dzielić L_j (rozgałęziać) jeśli:

- **LP** w L_j jest sprzeczne,
- optymalne rozwiązanie **LP** jest całkowitoliczbowe,
- wartość funkcji celu **LP** w L_j jest nie większa niż aktualne dolne ograniczenie.

Podsumowanie

Załóżmy rozpatrzyliśmy węzeł L_j. Nie ma sensu dzielić L_j (rozgałęziać) jeśli:

- **LP** w L_j jest sprzeczne,
- optymalne rozwiązanie **LP** jest całkowitoliczbowe,
- wartość funkcji celu **LP** w L_j jest nie większa niż aktualne dolne ograniczenie.

Uwagi

- Relaksacje **LP** rozwiązuje się efektywnie,
- Nie ma ogólnej metody wyboru zmiennej decyzyjne.
- Nie ma ogólnej metody wyboru węzła po rozgałęzieniu.

Metoda przeglądu dla problemów 0-1

W metodzie tej stosuje się metodę podziału i ograniczeń w celu "inteligentnego” ustalania wartości zmiennych decyzyjnym na 0 lub 1. Zmienne, które nie są ustalone będziemy nazywać wolnymi. Zakłada się, że

Metoda przeglądu dla problemów 0-1

W metodzie tej stosuje się metodę podziału i ograniczeń w celu "inteligentnego" ustalania wartości zmiennych decyzyjnym na 0 lub 1. Zmienne, które nie są ustalone będziemy nazywać wolnymi. Zakłada się, że

- wszystkie współczynniki celu są niedodatnie (w zadaniu maksymalizacji), Jeżeli współczynnik przy x_i jest dodatni, to podstawiamy $x_i = 1 - \overline{x}_i$, $\overline{x}_i \in \{0, 1\}$,

Metoda przeglądu dla problemów 0-1

W metodzie tej stosuje się metodę podziału i ograniczeń w celu "inteligentnego” ustalania wartości zmiennych decyzyjnym na 0 lub 1. Zmienne, które nie są ustalone będziemy nazywać wolnymi. Zakłada się, że

- wszystkie współczynniki celu są niedodatnie (w zadaniu maksymalizacji), Jeżeli współczynnik przy x_i jest dodatni, to podstawiamy $x_i = 1 - \overline{x}_i$, $\overline{x}_i \in \{0, 1\}$,
- ograniczenia są postaci "$\leqslant$”.

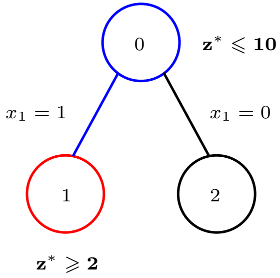
Metoda przeglądu dla problemów 0-1

Rozpatrzmy przykład:

$$z^* = \max z = -8x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 - 5x_5 + 10$$

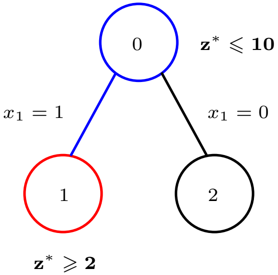
$$\begin{array}{rcl} -3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 & \leqslant & -2 \\ -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 & \leqslant & -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\} & & \end{array}$$

Metoda przeglądu dla problemów 0-1



węzeł 0: Wszystkie zmienne decyzyjne są wolne. Jeżeli chwilowo nadamy im wartość 0, to $z^* \leqslant 10$, ponieważ współczynniki funkcji celu są ujemne. Rozwiązanie to nie spełnia ograniczeń, więc dokonujemy rozgałęzienia.

Metoda przeglądu dla problemów 0-1



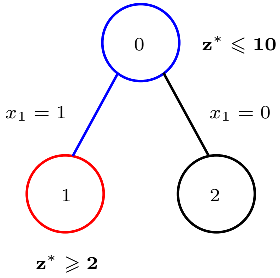
węzeł 0: Wszystkie zmienne decyzyjne są wolne. Jeżeli chwilowo nadamy im wartość 0, to $z^* \leqslant 10$, ponieważ współczynniki funkcji celu są ujemne. Rozwiązanie to nie spełnia ograniczeń, więc dokonujemy rozgałęzienia.

węzeł: $x_1 = 1$ jest ustalona x_2, x_3, x_4, x_5 są wolne. Nadajmy im chwilowo wartość 0

$$z = -8(1) - 2(0) - 4(0) - 7(0) - 5(0) + 10 = 2.$$

Rozwiązanie to spełnia ograniczenia, więc $z^* \geqslant 2$. Dalej nie rozgałęziamy.

Metoda przeglądu dla problemów 0-1

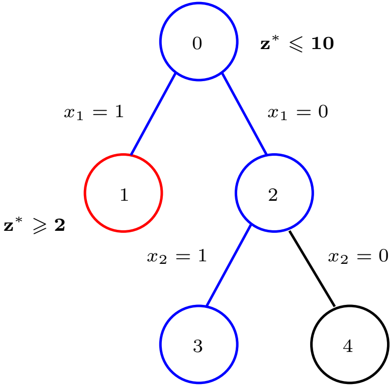


węzeł 0: Wszystkie zmienne decyzyjne są wolne. Jeżeli chwilowo nadamy im wartość 0, to $z^* \leqslant 10$, ponieważ współczynniki funkcji celu są ujemne. Rozwiązanie to nie spełnia ograniczeń, więc dokonujemy rozgałęzienia.
węzeł: $x_1 = 1$ jest ustalona x_2, x_3, x_4, x_5 są wolne. Nadajmy im chwilowo wartość 0

$$z = -8(1) - 2(0) - 4(0) - 7(0) - 5(0) + 10 = 2.$$

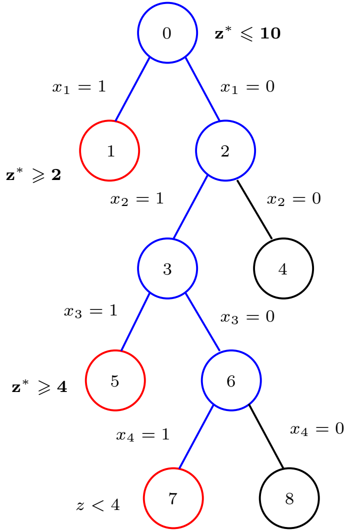
Rozwiązanie to spełnia ograniczenia, więc $z^* \geqslant 2$. Dalej nie rozgałęziamy.
węzeł 2: $x_1 = 0$ jest ustalona. x_2, x_3, x_4, x_5 są wolne. Nadajmy im chwilowo wartość 0. Przypadek jak węzeł 0. Rozgałęziamy.

Metoda przeglądu dla problemów 0-1



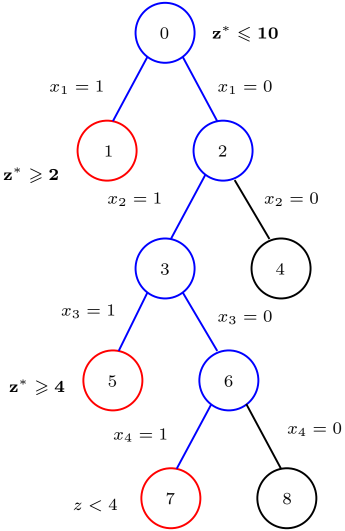
węzeł 3: $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$ są ustalone, x_3, x_4, x_5 są wolne. Nadajemy im wartość 0. Rozwiązanie nie spełnia ograniczeń $-3 \not\leqslant -4$. Rozgałęziamy.

Metoda przeglądu dla problemów 0-1



węzeł 5: $x_1 = 0$ i $x_2 = x_3 = 1$ są ustalone, x_4, x_5 są wolne. Nadajemy im wartość 0.Rozwiązanie to jest dopuszczalne $z = 4$. Więc otrzymujemy lepsze dolne ograniczenie $z^* \geqslant 4$

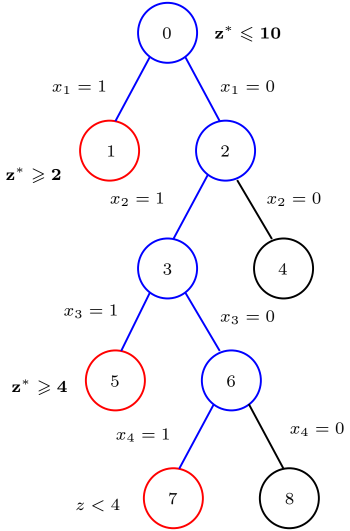
Metoda przeglądu dla problemów 0-1



węzeł 5: $x_1 = 0$ i $x_2 = x_3 = 1$ są ustalone, x_4, x_5 są wolne. Nadajemy im wartość 0.Rozwiązanie to jest dopuszczalne $z = 4$. Więc otrzymujemy lepsze dolne ograniczenie $z^* \geqslant 4$

węzeł 6: $x_1 = x_3 = 0$ i $x_2 = 1$ są ustalone, x_4, x_5 są wolne. Nadajemy im wartość 0. Rozwiązanie nie spełnia ograniczeń $-3 \not\leqslant -4$ (jak w węźle 3). Rozgałęziamy.

Metoda przeglądu dla problemów 0-1

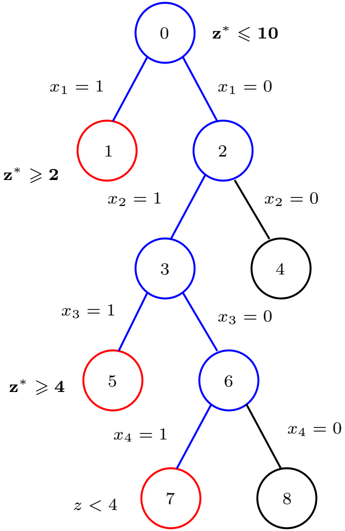


węzeł 5: $x_1 = 0$ i $x_2 = x_3 = 1$ są ustalone, x_4, x_5 są wolne. Nadajemy im wartość 0.Rozwiązanie to jest dopuszczalne $z = 4$. Więc otrzymujemy lepsze dolne ograniczenie $z^* \geqslant 4$

węzeł 6: $x_1 = x_3 = 0$ i $x_2 = 1$ są ustalone, x_4, x_5 są wolne. Nadajemy im wartość 0. Rozwiązanie nie spełnia ograniczeń $-3 \not\leqslant -4$ (jak w węźle 3). Rozgałęziamy.

węzeł 7: $x_1 = x_3 = 0$ i $x_2 = x_4 = 1$ są ustalone, x_5 jest wolna. Nadajemy jej wartość 0. Rozwiązanie jest niedopuszczalne i $z = 1 < 4$, a więc nie ma sensu rozgałęziać.

Metoda przeglądu dla problemów 0-1



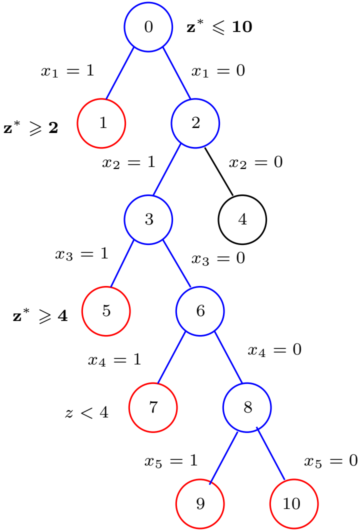
węzeł 5: $x_1 = 0$ i $x_2 = x_3 = 1$ są ustalone, x_4, x_5 są wolne. Nadajemy im wartość 0.Rozwiązanie to jest dopuszczalne $z = 4$. Więc otrzymujemy lepsze dolne ograniczenie $z^* \geqslant 4$

węzeł 6: $x_1 = x_3 = 0$ i $x_2 = 1$ są ustalone, x_4, x_5 są wolne. Nadajemy im wartość 0. Rozwiązanie nie spełnia ograniczeń $-3 \not\leqslant -4$ (jak w węźle 3). Rozgałęziamy.

węzeł 7: $x_1 = x_3 = 0$ i $x_2 = x_4 = 1$ są ustalone, x_5 jest wolna. Nadajemy jej wartość 0. Rozwiązanie jest niedopuszczalne i $z = 1 < 4$, a więc nie ma sensu rozgałęziać.

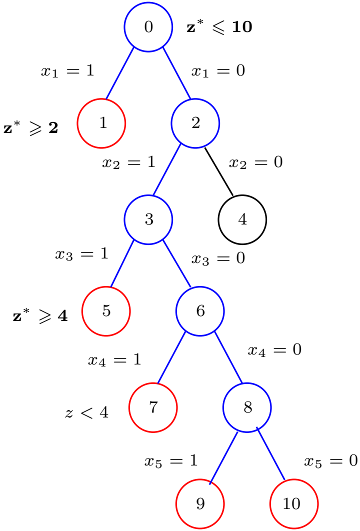
węzeł 8: jak dla węzła 6.

Metoda przeglądu dla problemów 0-1



węzeł 9: $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ $x_2 = x_5 = 1$ są ustalone. Jest to jedyne rozwiązanie i w dodatku niedopuszczalne. Nie rozgałęziamy.

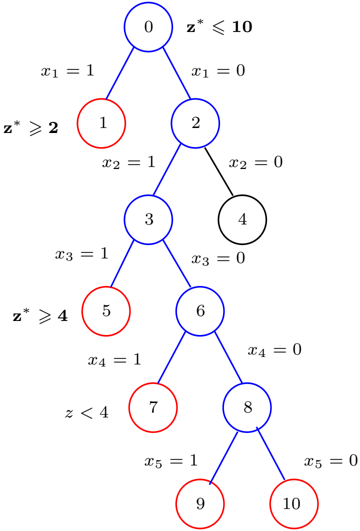
Metoda przeglądu dla problemów 0-1



węzeł 9: $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ $x_2 = x_5 = 1$ są ustalone. Jest to jedyne rozwiązanie i w dodatku niedopuszczalne. Nie rozgałęziamy.

węzeł 10: $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ $x_2 = 1$ są ustalone. Jest to jedyne rozwiązanie i jest niedopuszczalne. Nie rozgałęziamy.

Metoda przeglądu dla problemów 0-1



węzeł 9: $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ $x_2 = x_5 = 1$ są ustalone. Jest to jedyne rozwiązanie i w dodatku niedopuszczalne. Nie rozgałęziamy.

węzeł 10: $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ $x_2 = 1$ są ustalone. Jest to jedyne rozwiązanie i jest niedopuszczalne. Nie rozgałęziamy.

węzeł 4: $x_1 = x_2 = 0$ są ustalone x_3, x_4, x_5 są wolne. Ograniczenie

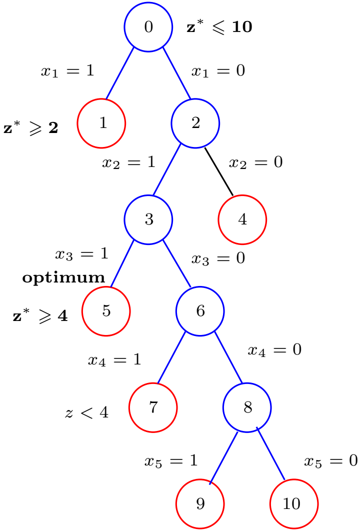
$$-3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leqslant -2$$

redukuje się do

$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leqslant -2.$$

Nie istnieje 0-1 podstawienie do x_3, x_4, x_5 spełniające powyższe ograniczenie. Nie ma sensu rozgałęziać.

Metoda przeglądu dla problemów 0-1



Rozpatrzyliśmy wszystkie węzły. Rozwiązaniem optymalnym jest $x_1 = x_4 = x_5 = 0$, $x_2 = x_3 = 1$. $z^* = 4$.

Podsumowanie

Nie rozgałęziamy w węźle jeżeli:

Podsumowanie

Nie rozgałęziamy w węźle jeżeli:

- kiedy zadanie PCL w węźle jest sprzeczne. Np. po podstawieniu zmiennych ustalonych do ograniczeń nie istnieje 0-1 podstawienie do zmiennych wolnych spełniające ograniczenia.

Podsumowanie

Nie rozgałęziamy w węźle jeżeli:

- kiedy zadanie PCL w węźle jest sprzeczne. Np. po podstawieniu zmiennych ustalonych do ograniczeń nie istnieje 0-1 podstawienie do zmiennych wolnych spełniające ograniczenia.
- rozwiązanie binarne po podstawieniu pod zmienne wolne wartości 0 jest dopuszczalne,

Podsumowanie

Nie rozgałęziamy w węźle jeżeli:

- kiedy zadanie PCL w węźle jest sprzeczne. Np. po podstawieniu zmiennych ustalonych do ograniczeń nie istnieje 0-1 podstawienie do zmiennych wolnych spełniające ograniczenia.
- rozwiązanie binarne po podstawieniu pod zmienne wolne wartości 0 jest dopuszczalne,
- wartość funkcji celu jest nie większa od aktualnego dolnego ograniczenia.

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książki

Stephen P. Bradley, Arnoldo C. Hax, Thomas L. Magnanti.
Applied Mathematical Programming.
Addison-Wesley, 1977.