1 Programowanie całkowitoliczbowe (PLC)

Metody programowania całkowitoliczbowego

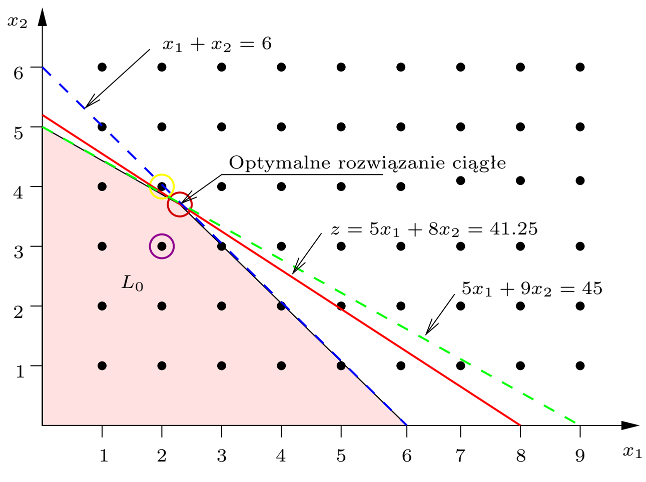
Wyróżnia się kilka podejść do rozwiązywania zagadnień programowania całkowitoliczbowego:

- metody przeglądu, m.in. metody podziału i ograniczeń,
- metody płaszczyzn odcinających,
- metody oparte na dekompozycji.

Rozwiązanie PCL za pomocą programowania liniowego (LP)

$$z^* = \max z = 5x_1 + 8x_2$$

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \leqslant & 6 \\ 5x_1 & + & 9x_2 & \leqslant & 45 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ i całkowite}} \end{array}$$



	Rozwiązanie optymalne ciągłe	Rozwiązanie zaokrąglone	Rozwiązanie najbliższe całkowite	Rozwiązanie optymalne całkowite
x_1	$\frac{9}{4} = 2.25$	2	2	**0**
x_2	$\frac{15}{4} = 3.75$	4	3	**5**
z	41.25	niedopuszcz.	34	**40**

Metoda podziału i ograniczeń dla PCL

Metoda podziału i ograniczeń jest oparta na podejściu “dziel i zwyciężaj”. Kluczowe fakty:

PCL= **LP** + ograniczenia całkowitoliczbowości

Fakt 1. Wartość optymalna funkcji celu **LP** jest *górnym ograniczeniem* (maksymalizacja funkcji celu) optymalnej wartości funkcji celu **PCL**.

Fakt 2. Wartość funkcji celu **PCL** dla dowolnego rozwiązania całkowitoliczbowego jest *dolnym ograniczeniem* (maksymalizacja funkcji celu) optymalnej wartości funkcji celu **PCL**.

Pomijamy warunki całkowitoliczbowości i rozwiązujemy następujące zagadnienie **LP**

$$z^* = \max z = 5x_1 + 8x_2$$

$$L_0 = \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

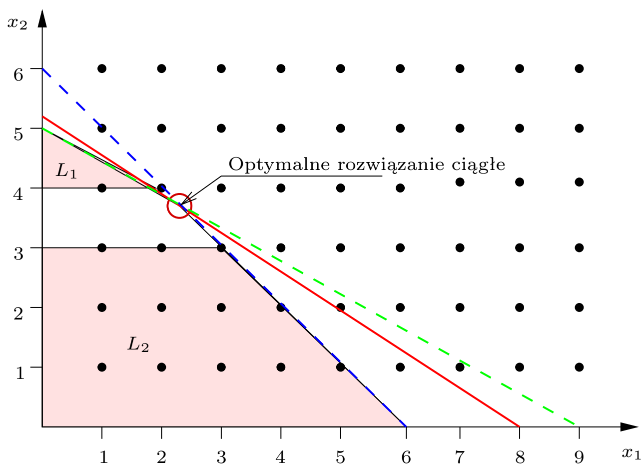
Otrzymujemy: $x_1 = 2\frac{1}{4}$, $x_2 = 3\frac{3}{4}$, $z^0 = 41\frac{1}{4}$ oraz **górne ograniczenie**

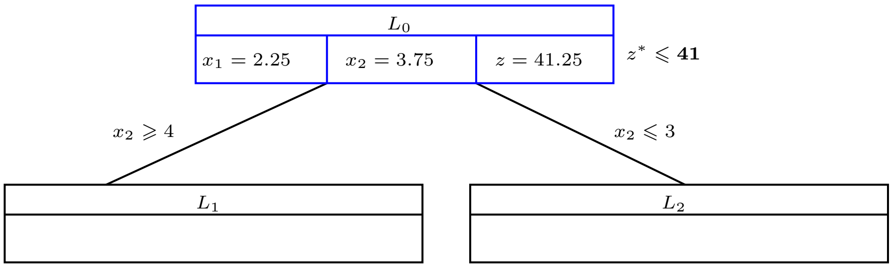
$$z^* \leqslant 41\frac{1}{4}.$$

Ponieważ współczynniki funkcji celu są całkowitoliczbowe, możemy poprawić **górne ograniczenie**

$$z^* \leqslant 41.$$

Wybieramy zmienną decyzyjną o wartości ułamkowej np. x_2 – wybór jest heurystyczny (możemy wybrać również x_1). Narzucamy warunki, $x_2 \leqslant 3$ lub $x_2 \geqslant 4$, wykluczające przedział $(3, 4)$.

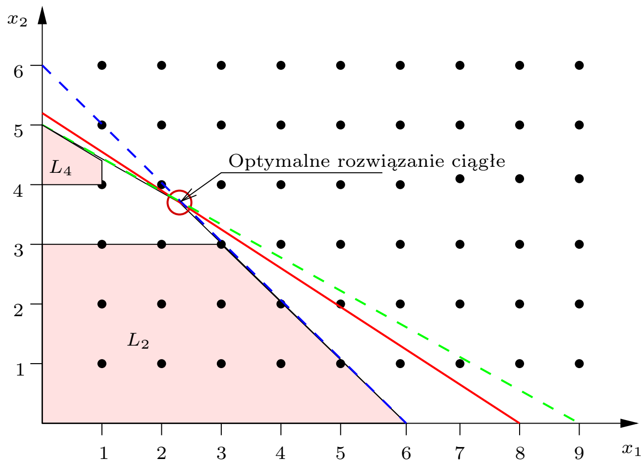


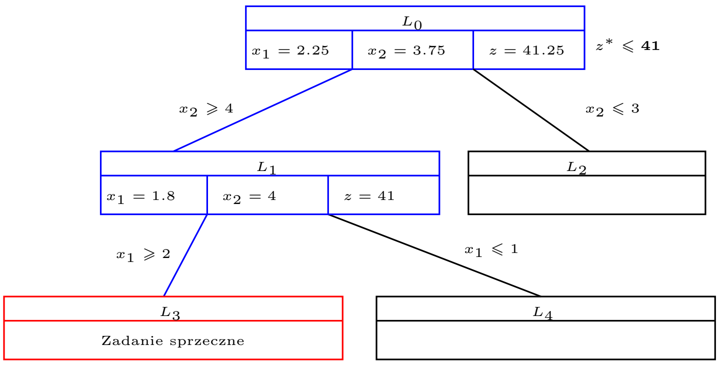


$$
L_1 = \left\{
\begin{array}{l}
\max z = 5x_1 + 8x_2 \\
\begin{array}{rcrcl}
x_1 & + & x_2 & \leqslant & 6 \\
5x_1 & + & 9x_2 & \leqslant & 45 \\
 & & \mathbf{x_2} & \geqslant & \mathbf{4}
\end{array} \\
x_1, x_2 \geqslant 0
\end{array}
\right.
\qquad
L_2 = \left\{
\begin{array}{l}
\max z = 5x_1 + 8x_2 \\
\begin{array}{rcrcl}
x_1 & + & x_2 & \leqslant & 6 \\
5x_1 & + & 9x_2 & \leqslant & 45 \\
 & & \mathbf{x_2} & \leqslant & \mathbf{3}
\end{array} \\
x_1, x_2 \geqslant 0
\end{array}
\right.
$$

Wybór węzła L_1 czy L_2 jest heurystyczny. Rozpatrzmy L_1. Otrzymujemy: $x_1 = 1.8$, $x_2 = 4$, $z = 41$.

Wybieramy zmienną decyzyjną o wartości ułamkowej x_1 Narzucamy warunki, $x_1 \leqslant 1$ lub $x_1 \geqslant 2$, wykluczające przedział $(1, 2)$.



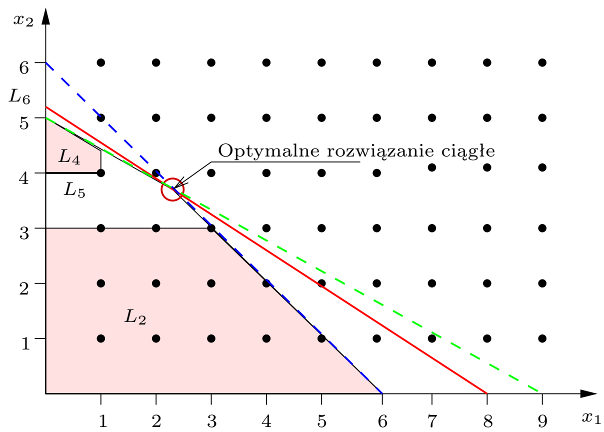


$$
\max z = 5x_1 + 8x_2 \qquad\qquad \max z = 5x_1 + 8x_2
$$

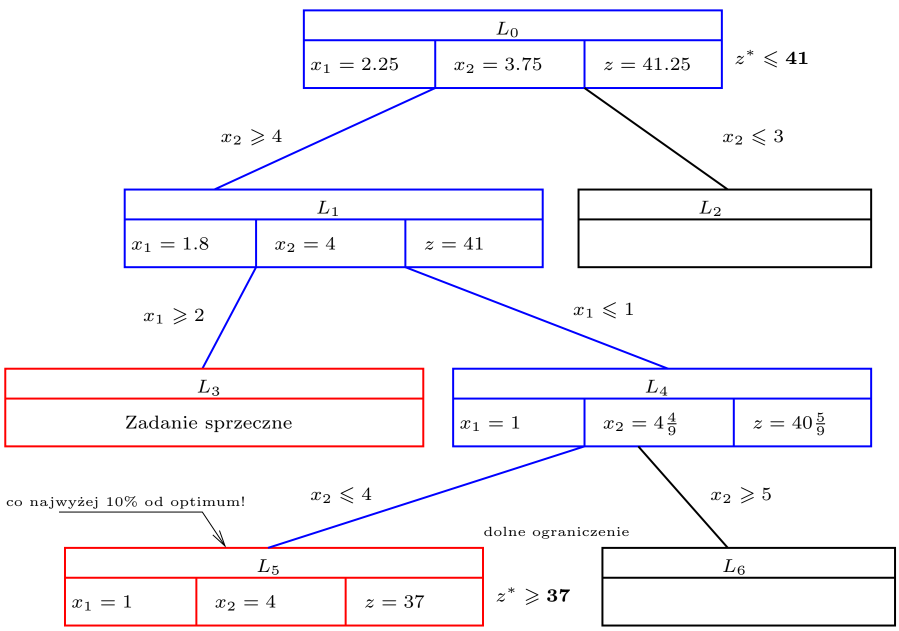
$$
L_3 = \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ x_2 \geqslant 4 \\ \mathbf{x_1} \geqslant \mathbf{2} \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad L_4 = \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ x_2 \geqslant 4 \\ \mathbf{x_1} \leqslant \mathbf{1} \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
$$

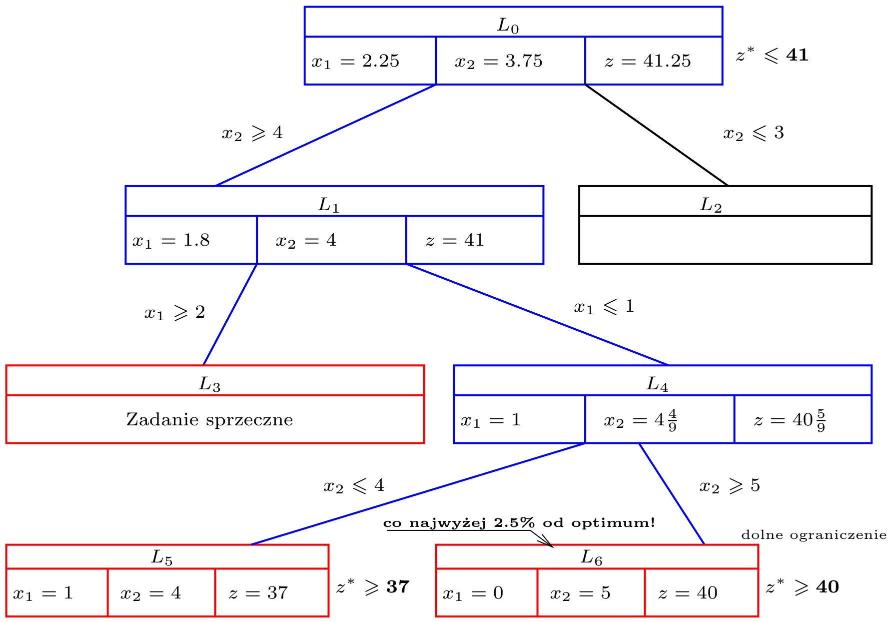
$$
\text{sprzeczne} \qquad x_1 = 1, x_2 = 4\frac{4}{9}, z = 40\frac{5}{9}
$$

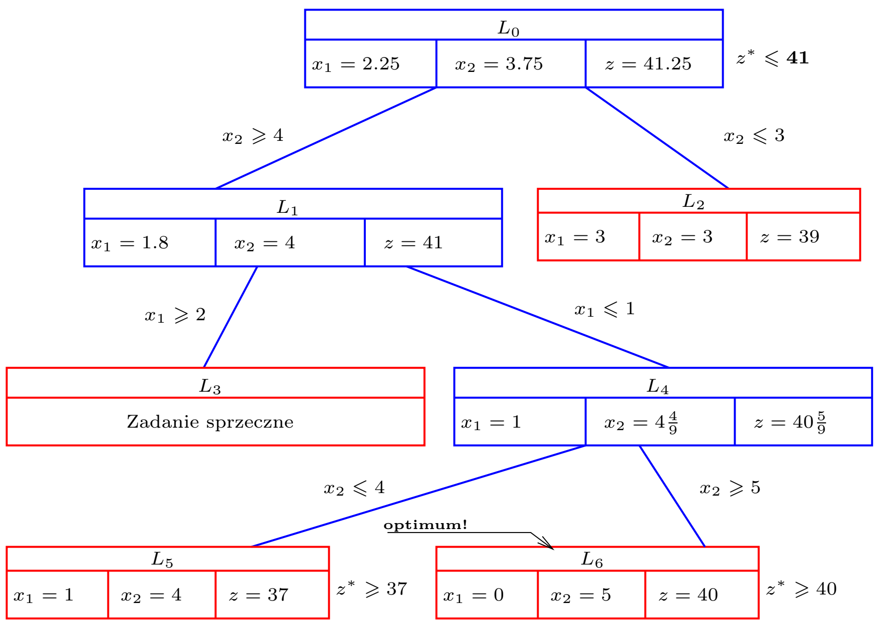
Wybieramy zmienną decyzyjną o wartości ułamkowej x_2 Narzucamy warunki, $x_2 \leqslant 4$ lub $x_2 \geqslant 5$, wykluczające przedział $(4, 5)$.

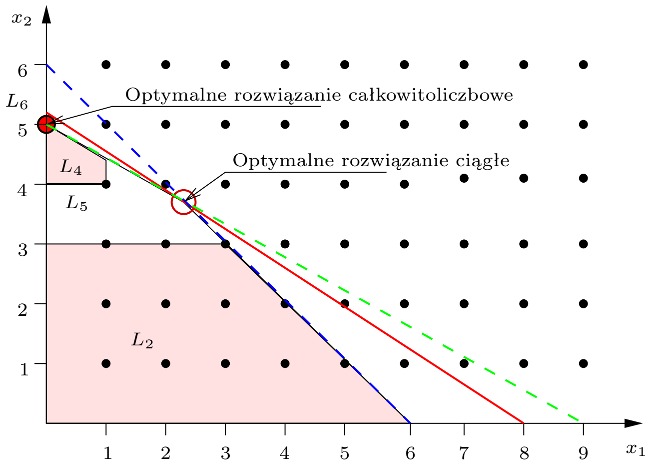


Rozpatrujemy L_5.

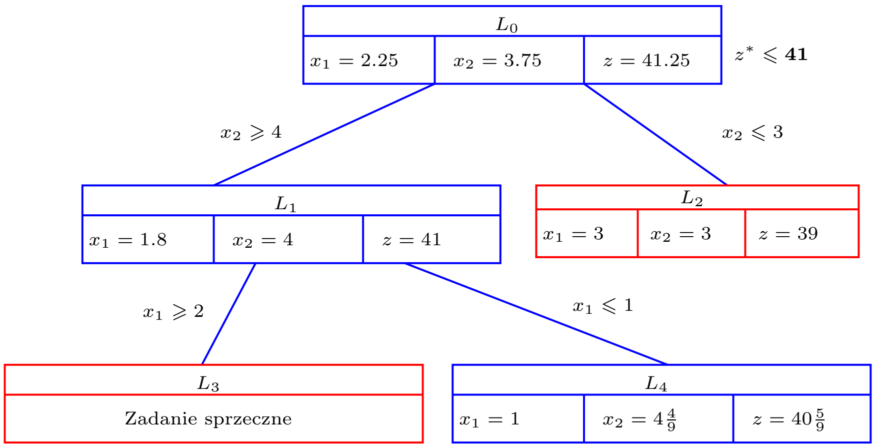



L_0
$x_1 = 2.25$
$x_2 = 3.75$
$z = 41.25$
$z^* \leqslant \mathbf{41}$
$x_2 \geqslant 4$
$x_2 \leqslant 3$
L_1
$x_1 = 1.8$
$x_2 = 4$
$z = 41$
L_2
$x_1 \geqslant 2$
$x_1 \leqslant 1$
L_3
Zadanie sprzeczne
L_4
$x_1 = 1$
$x_2 = 4\frac{4}{9}$
$z = 40\frac{5}{9}$
$x_2 \leqslant 4$
$x_2 \geqslant 5$
co najwyżej 2.5% od optimum!
dolne ograniczenie
L_5
$x_1 = 1$
$x_2 = 4$
$z = 37$
$z^* \geqslant \mathbf{37}$
L_6
$x_1 = 0$
$x_2 = 5$
$z = 40$
$z^* \geqslant \mathbf{40}$


L_0
$x_1 = 2.25$
$x_2 = 3.75$
$z = 41.25$
$z^* \leqslant \mathbf{41}$
$x_2 \geqslant 4$
$x_2 \leqslant 3$
L_1
$x_1 = 1.8$
$x_2 = 4$
$z = 41$
L_2
$x_1 = 3$
$x_2 = 3$
$z = 39$
$x_1 \geqslant 2$
$x_1 \leqslant 1$
L_3
Zadanie sprzeczne
L_4
$x_1 = 1$
$x_2 = 4\frac{4}{9}$
$z = 40\frac{5}{9}$
$x_2 \leqslant 4$
$x_2 \geqslant 5$
optimum!
L_5
$x_1 = 1$
$x_2 = 4$
$z = 37$
$z^* \geqslant 37$
L_6
$x_1 = 0$
$x_2 = 5$
$z = 40$
$z^* \geqslant 40$



Czy można poprawić górne ograniczenie?



Załóżmy, że w naszym przykładzie rozpatrujemy węzeł L_2 przed L_5 lub L_6. Optymalne rozwiązanie leży w L_2 lub L_4. Stąd z^* jest ograniczone przez $\mathbf{40\frac{5}{9}}$. Ponieważ współczynniki funkcji celu są całkowitoliczbowe, możemy poprawić *górne ograniczenie* na **40**.

Podsumowanie

Załóżmy rozpatrzyliśmy węzeł L_j. Nie ma sensu dzielić L_j (rozgałęziać) jeśli:

- **LP** w L_j jest sprzeczne,
- optymalne rozwiązanie **LP** jest całkowitoliczbowe,
- wartość funkcji celu **LP** w L_j jest nie większa niż aktualne dolne ograniczenie.

Uwagi

- Relaksacje **LP** rozwiązuje się efektywnie,
- Nie ma ogólnej metody wyboru zmiennej decyzyjne.
- Nie ma ogólnej metody wyboru węzła po rozgałęzieniu.

Metoda przeglądu dla problemów 0-1

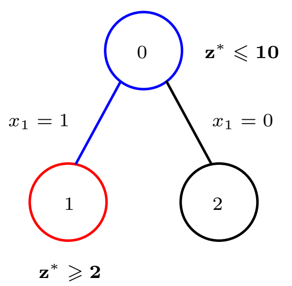
W metodzie tej stosuje się metodę podziału i ograniczeń w celu "inteligentnego" ustalania wartości zmiennych decyzyjnym na 0 lub 1. Zmienne, które nie są ustalone będziemy nazywać *wolnymi*. Zakłada się, że

- wszystkie współczynniki celu są niedodatnie (w zadaniu maksymalizacji), Jeżeli współczynnik przy x_i jest dodatni, to podstawiamy $x_i = 1 - \overline{x}_i$, $\overline{x}_i \in \{0,1\}$,
- ograniczenia są postaci "$\leqslant$".

Rozpatrzmy przykład.

$$z^* = \max z = -8x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 - 5x_5 + 10$$

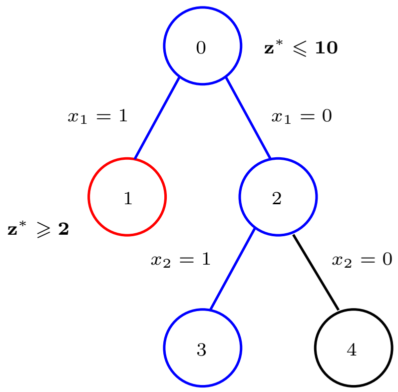
$$\begin{array}{lcl} -3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 & \leqslant & -2 \\ -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 & \leqslant & -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\} & & \end{array}$$



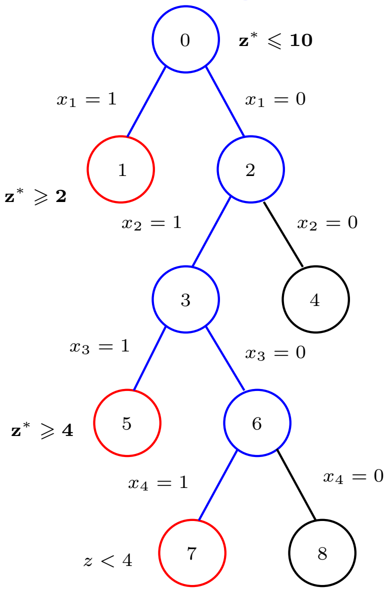
węzeł 0: Wszystkie zmienne decyzyjne są wolne. Jeżeli chwilowo nadamy im wartość 0, to $\mathbf{z}^* \leqslant \mathbf{10}$, ponieważ współczynniki funkcji celu są ujemne. Rozwiązanie to nie spełnia ograniczeń, więc dokonujemy rozgałęzienia.
węzeł 1:$x_1 = 1$ jest ustalona x_2, x_3, x_4, x_5 są wolne. Nadajmy im chwilowo wartość 0

$$z = -8(1) - 2(0) - 4(0) - 7(0) - 5(0) + 10 = 2.$$

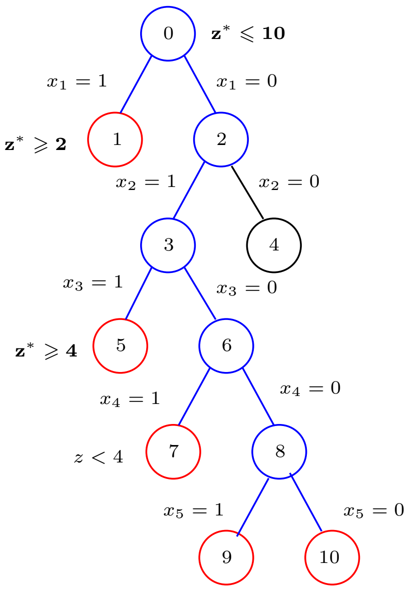
Rozwiązanie to spełnia ograniczenia, więc $\mathbf{z}^* \geqslant \mathbf{2}$. Dalej nie rozgałęziamy.
węzeł 2:$x_1 = 0$ jest ustalona. x_2, x_3, x_4, x_5 są wolne. Nadajmy im chwilowo wartość 0. Przypadek jak węzeł 0. Rozgałęziamy.



węzeł 3:$x_1 = 0$ i $x_2 = 1$ są ustalone, x_3, x_4, x_5 są wolne. Nadajemy im wartość 0. Rozwiązanie nie spełnia ograniczeń $-3 \not\leq -4$. Rozgałęziamy.



węzeł 5: $x_1 = 0$ i $x_2 = x_3 = 1$ są ustalone, x_4, x_5 są wolne. Nadajemy im wartość 0.Rozwiązanie to jest dopuszczalne $z = 4$. Więc otrzymujemy lepsze *dolne ograniczenie* $\mathbf{z}^* \geqslant \mathbf{4}$
węzeł 6: $x_1 = x_3 = 0$ i $x_2 = 1$ są ustalone, x_4, x_5 są wolne. Nadajemy im wartość 0. Rozwiązanie nie spełnia ograniczeń $-3 \not\leq -4$ (jak w węźle 3). Rozgałęziamy.
węzeł 7: $x_1 = x_3 = 0$ i $x_2 = x_4 = 1$ są ustalone, x_5 jest wolna. Nadajemy jej wartość 0. Rozwiązanie jest niedopuszczalne i $z = 1 < 4$, a więc nie ma sensu rozgałęziać.
węzeł 8: jak dla węzła 6.



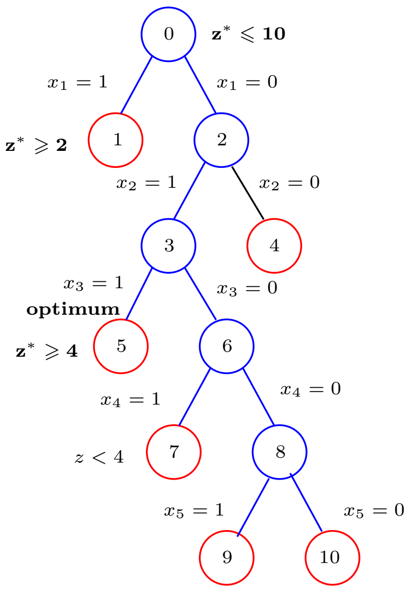
węzeł 9: $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ $x_2 = x_5 = 1$ są ustalone. Jest to jedyne rozwiązanie i w dodatku niedopuszczalne. Nie rozgałęziamy.
węzeł 10: $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ $x_2 = 1$ są ustalone. Jest to jedyne rozwiązanie i jest niedopuszczalne. Nie rozgałęziamy.
węzeł 4: $x_1 = x_2 = 0$ są ustalone x_3, x_4, x_5 są wolne. Ograniczenie

$$-3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leqslant -2$$

redukuje się do

$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leqslant -2.$$

Nie istnieje 0-1 podstawienie do x_3, x_4, x_5 spełniające powyższe ograniczenie. Nie ma sensu rozgałęziać.



Rozpatrzyliśmy wszystkie węzły. Rozwiązaniem optymalnym jest $x_1 = x_4 = x_5 = 0$, $x_2 = x_3 = 1$. $z^* = 4$.

Podsumowanie

Nie rozgałęziamy w węźle jeżeli:

- kiedy zadanie PCL w węźle jest sprzeczne. Np. po podstawieniu zmiennych ustalonych do ograniczeń nie istnieje 0-1 podstawienie do zmiennych wolnych spełniające ograniczenia.
- rozwiązanie binarne po podstawieniu pod zmienne wolne wartości 0 jest dopuszczalne,

- wartość funkcji celu jest nie większa od aktualnego dolnego ograniczenia.

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książki [1].

Literatura

[1] Stephen P. Bradley, Arnoldo C. Hax, Thomas L. Magnanti. *Applied Mathematical Programming.* Addison-Wesley, 1977.