Metody optymalizacji
Wykład nr 11

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska

Zagadnienie komiwojażera

Fakt 1

Cykl Hamiltona zawiera dokładnie jeden element z każdego wiersza i dokładnie jeden element z każdej kolumny macierzy kosztów.

Zagadnienie komiwojażera

Fakt 1

Cykl Hamiltona zawiera dokładnie jeden element z każdego wiersza i dokładnie jeden element z każdej kolumny macierzy kosztów.

Fakt 2

Jeśli odejmiemy stałą od wszystkich elementów jakiegoś wiersza lub jakiejś kolumny macierzy kosztów, to koszt każdego cyklu Hamiltona zmniejszy się dokładnie o tę stałą (względny koszt wszystkich cykli pozostanie taki sam).

Zagadnienie komiwojażera

Fakt 3

Jeżeli wielokrotnie zastosujemy fakt 2 aż otrzymamy w każdym wierszu i każdej kolumnie co najmniej jedno zero, a pozostałe elementy macierzy kosztów są nieujemne, to całkowita suma odjętych stałych jest dolnym ograniczeniem długości jakiegokolwiek cyklu Hamiltona.

Zagadnienie komiwojażera

Fakt 3

Jeżeli wielokrotnie zastosujemy fakt 2 aż otrzymamy w każdym wierszu i każdej kolumnie co najmniej jedno zero, a pozostałe elementy macierzy kosztów są nieujemne, to całkowita suma odjętych stałych jest dolnym ograniczeniem długości jakiegokolwiek cyklu Hamiltona.

Zbiór rozwiązań będziemy dzielić na dwa podzbiory:

Zagadnienie komiwojażera

Fakt 3

Jeżeli wielokrotnie zastosujemy fakt 2 aż otrzymamy w każdym wierszu i każdej kolumnie co najmniej jedno zero, a pozostałe elementy macierzy kosztów są nieujemne, to całkowita suma odjętych stałych jest dolnym ograniczeniem długości jakiegokolwiek cyklu Hamiltona.

Zbiór rozwiązań będziemy dzielić na dwa podzbiory:

- złożony z rozwiązań zawierających wyróżniony łuk,

Zagadnienie komiwojażera

Fakt 3

Jeżeli wielokrotnie zastosujemy fakt 2 aż otrzymamy w każdym wierszu i każdej kolumnie co najmniej jedno zero, a pozostałe elementy macierzy kosztów są nieujemne, to całkowita suma odjętych stałych jest dolnym ograniczeniem długości jakiegokolwiek cyklu Hamiltona.

Zbiór rozwiązań będziemy dzielić na dwa podzbiory:

- złożony z rozwiązań zawierających wyróżniony łuk,
- złożony z rozwiązań nie zawierających wyróżnionego łuku.

Zagadnienie komiwojażera

Rozważmy przykładową macierz kosztów

$$\begin{pmatrix} \infty & 3 & 93 & 13 & 33 & 9 \\ 4 & \infty & 77 & 42 & 21 & 16 \\ 45 & 17 & \infty & 36 & 16 & 28 \\ 39 & 90 & 80 & \infty & 56 & 7 \\ 28 & 46 & 88 & 33 & \infty & 25 \\ 3 & 88 & 18 & 46 & 92 & \infty \end{pmatrix}$$

Odejmujemy 3, 4, 16, 7, 25 i 3 od elementów kolejnych wierszy oraz 15 i 8 od elementów kolumny trzeciej i czwartej.

Zagadnienie komiwojażera

Zredukowana macierz ma postać:

$$\begin{pmatrix} \infty & 0 & 75 & 2 & 30 & 9 \\ 0 & \infty & 58 & 30 & 17 & 12 \\ 29 & 1 & \infty & 12 & 0 & 12 \\ 32 & 83 & 58 & \infty & 49 & 0 \\ 3 & 21 & 48 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 85 & 0 & 35 & 89 & \infty \end{pmatrix}$$

Dolne ograniczenie na długość rozwiązań jest równe 81.
Podział zbioru rozwiązań dokonujemy za pomocą łuku $(6, 3)$, ponieważ ten wybór powoduje największy wzrost dolnego ograniczenia w prawym poddrzewie, czyli 48.

Zagadnienie komiwojażera

wszystkie rozwiązania $\mathbf{z^* \geqslant 81}$

$z \geqslant 81$ rozwiązania z $(6,3)$

rozwiązania bez $(6,3)$ $z \geqslant 81 + 48 = 129$

bez wiersza nr 6 i kolumny nr 3

$$\begin{pmatrix} \infty & 0 & 2 & 30 & 9 \\ 0 & \infty & 30 & 17 & 12 \\ 29 & 1 & 12 & 0 & \infty \\ 32 & 83 & \infty & 49 & 0 \\ 3 & 21 & 0 & \infty & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \infty & 0 & 27 & 2 & 30 & 9 \\ 0 & \infty & 10 & 30 & 17 & 12 \\ 29 & 1 & \infty & 12 & 0 & 12 \\ 32 & 83 & 10 & \infty & 49 & 0 \\ 3 & 21 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 85 & \infty & 35 & 89 & \infty \end{pmatrix}$$

Dzielimy zbiór w lewym poddrzewie za pomocą łuku $(4,6)$. Ten wybór powoduje wzrost dolnego ograniczenia w prawym poddrzewie o 32.

Zagadnienie komiwojażera

rozwiązania z $(6,3)$ — $z \geqslant 81$

- $z \geqslant 81$ — rozwiązania z $(6,3)$ $(4,6)$
- rozwiązania z $(6,3)$ bez $(4,6)$ — $z \geqslant 81 + 32 = 113$

bez wierszy nr 4, 6 i kolumn nr 3, 6

$$\begin{pmatrix} \infty & \color{red}{0} & 2 & 30 \\ \color{red}{0} & \infty & 30 & \color{blue}{17} \\ 29 & 1 & \color{red}{\infty} & \color{red}{0} \\ \color{blue}{3} & 21 & \color{red}{0} & \infty \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \infty & \color{red}{0} & 2 & 30 & 9 \\ \color{red}{0} & \infty & 30 & 17 & 12 \\ 29 & 1 & 12 & \color{red}{0} & \infty \\ \color{red}{0} & \color{red}{51} & \infty & \color{red}{17} & \color{red}{\infty} \\ 3 & 21 & \color{red}{0} & \infty & \color{red}{0} \end{pmatrix}$$

Dzielimy zbiór w lewym poddrzewie za pomocą łuku $(2,1)$. Wybór powoduje wzrost dolnego ograniczenia w prawym poddrzewie o 17+3=20. Odejmujemy od wiersza 17, od pierwszej kolumny 3. Zabraniamy przejścia przez łuk $(3,4)$ (lewe poddrzewo), jeśli w rozwiązaniu są $(4,6)$ i $(6,3)$.

Zagadnienie komiwojażera

rozwiązania z $(6,3)$ $(4,6)$ — $z \geqslant 81$

$z \geqslant 84$ — rozwiązania z $(6,3)$ $(4,6)$ $(2,1)$

rozwiązania z $(6,3)$ $(4,6)$ bez $(2,1)$ — $z \geqslant 81 + 20 = 101$

bez wierszy nr 2, 4, 6 i kolumn nr 1, 3, 6

$$\begin{pmatrix} \infty & 2 & 30 \\ 1 & \infty & 0 \\ 21 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

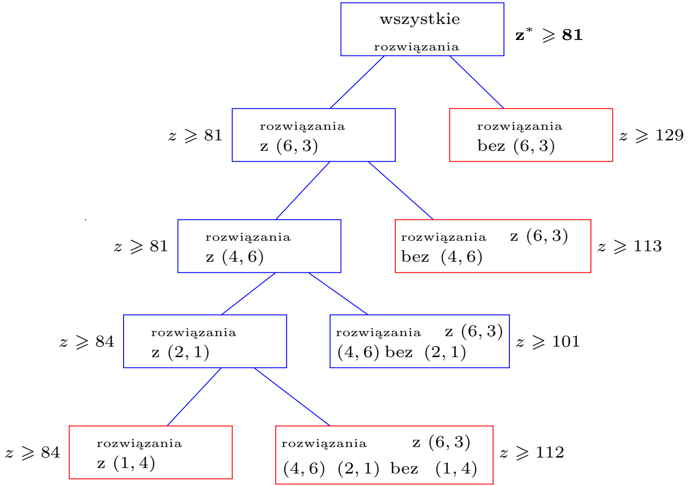
można polepszyć dolne ograniczenie o 3

$$z \geqslant 81 + 3 = 84$$

$$\begin{pmatrix} \infty & 0 & 28 \\ 0 & \infty & 0 \\ 20 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \infty & 0 & 2 & 30 \\ \infty & \infty & 13 & 0 \\ 26 & 1 & \infty & 0 \\ 0 & 21 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

Zagadnienie komiwojażera

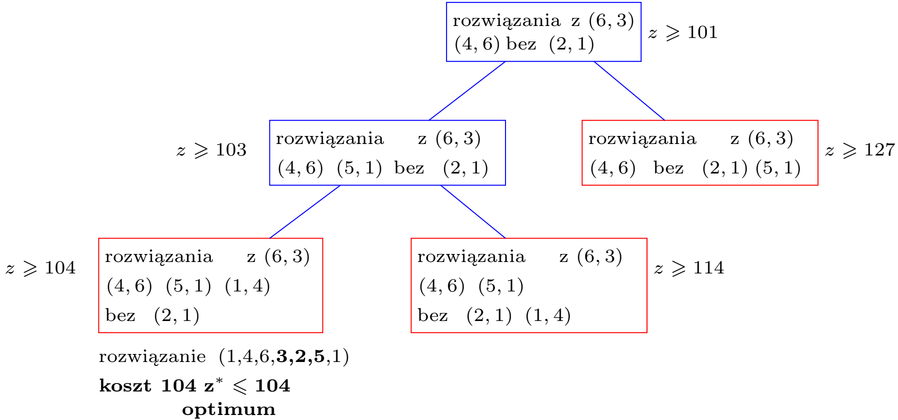


rozwiązanie (1,4,6,**3,5,2**,1)

koszt 104 $\mathbf{z^* \leqslant 104}$

Zagadnienie komiwojażera

Należy jeszcze rozpatrzyć rozwiązanie nie zawierające łuku (2, 1).



Otrzymaliśmy dwa rozwiązania optymalne o koszcie równym 104.

Zagadnienie plecakowe ZP

Sformułowanie zagadnienie w postaci **PLC**

$$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \to \max$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} & a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leqslant b, \\ & x_i \in \{0, 1\} \text{ dla } i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Zagadnienie plecakowe ZP

Rozwiązanie następującego problemu linowego programowania (relaksacji) dostarcza nam górnego ograniczenia wartości funkcji celu w **ZP**.

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max \tag{1}$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} &a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leqslant b, \\ &0 \leqslant x_i \leqslant 1 \text{ dla } i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

Problem (1)- (2) można użyć do konstrukcji algorytmu podziału i ograniczeń.

Jak efektywnie rozwiązań relaksację ZP (problem LP)?

- Uporządkuj przedmioty w **nierosnącym** porządku względem stosunków $\frac{c_i}{a_i}$, $\frac{c_1}{a_1} \geqslant \cdots \geqslant \frac{c_n}{a_n}$.
- Włóż do plecaka przedmiot o największym stosunku. (najbardziej atrakcyjny).
  Powtarzaj proces dopóki plecak nie jest pełny.

Jak efektywnie rozwiązań relaksację ZP (problem LP)?

- Uporządkuj przedmioty w **nierosnącym** porządku względem stosunków $\frac{c_i}{a_i}$, $\frac{c_1}{a_1} \geqslant \cdots \geqslant \frac{c_n}{a_n}$.
- Włóż do plecaka przedmiot o największym stosunku. (najbardziej atrakcyjny).
  Powtarzaj proces dopóki plecak nie jest pełny.

Otrzymujemy rozwiązanie

$$x_1 = \cdots = x_r = 1, x_{r+1} = \cdots = x_n = 0,$$

dla którego

$$a_1 x_1 + \cdots + a_r x_r \leqslant b \text{ i } a_1 x_1 + \cdots + a_{r+1} x_{r+1} > b.$$

Jak efektywnie rozwiązań relaksację ZP (problem LP)?

- Uporządkuj przedmioty w **nierosnącym** porządku względem stosunków $\frac{c_i}{a_i}$, $\frac{c_1}{a_1} \geqslant \cdots \geqslant \frac{c_n}{a_n}$.
- Włóż do plecaka przedmiot o największym stosunku. (najbardziej atrakcyjny).
  Powtarzaj proces dopóki plecak nie jest pełny.

Otrzymujemy rozwiązanie

$$x_1 = \cdots = x_r = 1, x_{r+1} = \cdots = x_n = 0,$$

dla którego

$$a_1 x_1 + \cdots + a_r x_r \leqslant b \text{ i } a_1 x_1 + \cdots + a_{r+1} x_{r+1} > b.$$

$$x_1^* = \cdots = x_r^* = 1, x_{r+1}^* = \frac{1}{a_{r+1}}(b - a_1 - \cdots - a_r), x_{r+2}^* = \cdots = x_n^* = 0 \quad (3)$$

Jak efektywnie rozwiązań relaksację ZP (problem LP)?

Twierdzenie

Rozwiązanie (3) jest rozwiązanie optymalnym problem (1)- (2).

Jak efektywnie rozwiązań relaksację ZP (problem LP)?

Twierdzenie

Rozwiązanie (3) jest rozwiązanie optymalnym problem (1)- (2).

Dowód.

Jest oczywiste, że $\boldsymbol{x}^*$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla (1)- (2).

Jak efektywnie rozwiązań relaksację ZP (problem LP)?

Twierdzenie

Rozwiązanie (3) jest rozwiązanie optymalnym problem (1)- (2).

Dowód.

Jest oczywiste, że $\boldsymbol{x}^*$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla (1)- (2). Aby pokazać $\boldsymbol{x}^*$ jest rozwiązaniem optymalnym, wystarczy wyznaczyć rozwiązanie dualne $\boldsymbol{y}^*$, dla którego

$$c_1 x_1^* + \cdots + c_n x_n^* = b_1 y_1^* + y_2^* + \cdots + y_{n+1}^*.$$

Jak efektywnie rozwiązań relaksację ZP (problem LP)?

Model dualny do (1)- (2) jest postaci:

$$b_1 y_1 + y_2 + \cdots + y_{n+1} \to \min$$

$$a_1 y_1 + y_2 \geqslant c_1$$

$$\vdots$$

$$a_n y_1 + y_{n+1} \geqslant c_n$$

$$y_1, \ldots, y_{n+1} \geqslant 0.$$

Jak efektywnie rozwiązań relaksację ZP (problem LP)?

Model dualny do (1)- (2) jest postaci:

$$b_1 y_1 + y_2 + \cdots + y_{n+1} \to \min$$
$$a_1 y_1 + y_2 \geqslant c_1$$
$$\vdots$$
$$a_n y_1 + y_{n+1} \geqslant c_n$$
$$y_1, \ldots, y_{n+1} \geqslant 0.$$

Rozwiązanie

$$y_1^* = \frac{c_{r+1}}{a_{r+1}}, y_k^* = c_{k-1} - a_{k-1}\frac{c_{r+1}}{a_{r+1}} \quad k = 2, \ldots, r+1,$$
$$y_k^* = 0 \quad k = r+2, \ldots, n+1$$

jest dopuszczalne przy założeniu $\frac{c_1}{a_1} \geqslant \cdots \geqslant \frac{c_n}{a_n}$

Jak efektywnie rozwiązań relaksację ZP (problem LP)?

Model dualny do (1)- (2) jest postaci:

$$b_1 y_1 + y_2 + \cdots + y_{n+1} \to \min$$
$$a_1 y_1 + y_2 \geqslant c_1$$
$$\vdots$$
$$a_n y_1 + y_{n+1} \geqslant c_n$$
$$y_1, \ldots, y_{n+1} \geqslant 0.$$

Rozwiązanie

$$y_1^* = \frac{c_{r+1}}{a_{r+1}}, y_k^* = c_{k-1} - a_{k-1}\frac{c_{r+1}}{a_{r+1}} \quad k = 2, \ldots, r+1,$$
$$y_k^* = 0 \quad k = r+2, \ldots, n+1$$

jest dopuszczalne przy założeniu $\frac{c_1}{a_1} \geqslant \cdots \geqslant \frac{c_n}{a_n}$ i spełnia

$$c_1 x_1^* + \cdots + c_n x_n^* = b_1 y_1^* + y_2^* + \cdots + y_{n+1}^*.$$

Zagadnienie plecakowe ZP

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 2x_5 \to \max$$

$$5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 \leqslant 15,$$
$$x_i \in \{0, 1\} \text{ dla } i = 1, \ldots, 5.$$

Zagadnienie plecakowe ZP

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 2x_5 \to \max$$

$$5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 \leqslant 15,$$
$$x_i \in \{0, 1\} \text{ dla } i = 1, \ldots, 5.$$

przedmiot	c_i/a_i	ranking (1=najlepszy, 5=najgorszy)
1	1	1
2	0.75	5
3	0.86	4
4	1	1
5	1	1

Zagadnienie plecakowe ZP

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 2x_5 \to \max$$

$$5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 \leqslant 15,$$
$$x_i \in \{0, 1\} \text{ dla } i = 1, \ldots, 5.$$

przedmiot	c_i/a_i	ranking (1=najlepszy, 5=najgorszy)
1	1	1
2	0.75	5
3	0.86	4
4	1	1
5	1	1

Wkładamy do plecaka przedmioty $1, 4, 5$. Jeżeli dołożymy 3, to nastąpi przepełnienie.

Zagadnienie plecakowe ZP

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 2x_5 \to \max$$

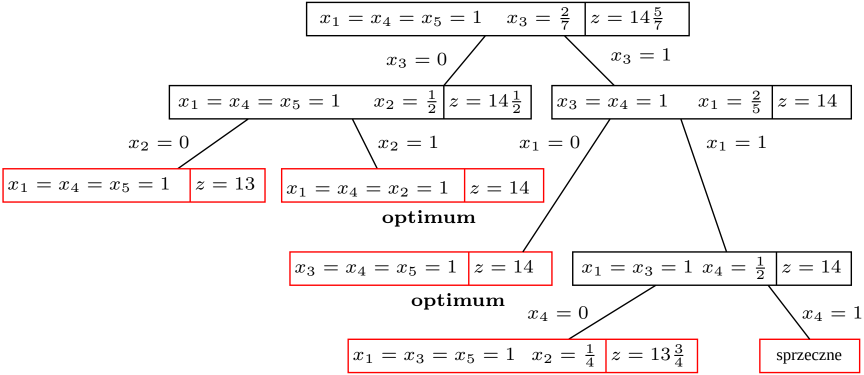
$$5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 \leqslant 15,$$
$$x_i \in \{0, 1\} \text{ dla } i = 1, \dots, 5.$$

przedmiot	c_i/a_i	ranking (1=najlepszy, 5=najgorszy)
1	1	1
2	0.75	5
3	0.86	4
4	1	1
5	1	1

Wkładamy do plecaka przedmioty $1, 4, 5$. Jeżeli dołożymy 3, to nastąpi przepełnienie. Zatem

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = \frac{2}{7}, x_4 = 1, x_5 = 1, z = 14\frac{5}{7}.$$

Zagadnienie plecakowe ZP



Unimodularność

Problem **PLC**

$$\max \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant 0 \text{ i całkowity}$$

Problem **LP**

$$\max \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant 0$$

Unimodularność

Problem **PLC**

$$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant 0 \text{ i całkowity}$$

Problem **LP**

$$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant 0$$

Załóżmy, że $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$ i $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$.

Unimodularność

Problem **PLC**

$$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant 0 \text{ i całkowity}$$

Problem **LP**

$$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant 0$$

Załóżmy, że $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$ i $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$.

- Kiedy problem **PLC** można rozwiązać rozwiązując zadanie **LP**?

Unimodularność

Problem **PLC**

$$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant 0 \text{ i całkowity}$$

Problem **LP**

$$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant 0$$

Załóżmy, że $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$ i $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$.

- Kiedy problem **PLC** można rozwiązać rozwiązując zadanie **LP**?
- Kiedy rozwiązanie optymalne zadania **LP** ma wartości całkowitoliczbowe?

Unimodularność

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

Rozwiązaniem bazowym jest

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0},$$

gdzie $\boldsymbol{B}$ jest podmacierzą bazową macierzy $\boldsymbol{A}$.

Unimodularność

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \;\Leftrightarrow\; [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

Rozwiązaniem bazowym jest

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0},$$

gdzie $\boldsymbol{B}$ jest podmacierzą bazową macierzy $\boldsymbol{A}$.
Jeżeli $\boldsymbol{B}^{-1}$ jest macierzą całkowitoliczbową, to $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}$ jest całkowitoliczbowe.

Unimodularność

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \;\Leftrightarrow\; [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

Rozwiązaniem bazowym jest

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0},$$

gdzie $\boldsymbol{B}$ jest podmacierzą bazową macierzy $\boldsymbol{A}$.
Jeżeli $\boldsymbol{B}^{-1}$ jest macierzą całkowitoliczbową, to $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}$ jest całkowitoliczbowe.

Definicja

Mówimy, że macierzy $\boldsymbol{A}$ jest unimodularna, jeśli każda jej podmacierz bazowa $\boldsymbol{B}$ ma wyznacznik o wartości +1 lub -1 ($|\det \boldsymbol{B}| = 1$).

Unimodularność

Zauważmy, że $\boldsymbol{B}$ jest macierzą nieosobliwą całkowitoliczbową ($\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$), wówczas macierz dopełnień algebraicznych $\boldsymbol{B}^{+}$ jest całkowitoliczbowa ($\boldsymbol{B} \in \mathbb{Z}^{m \times m}$, wartości wyznaczników są również całkowitoliczbowe). Wiadomo, że

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{B}} (\boldsymbol{B}^{+})^{T}.$$

Unimodularność

Zauważmy, że $\boldsymbol{B}$ jest macierzą nieosobliwą całkowitoliczbową ($\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$), wówczas macierz dopełnień algebraicznych $\boldsymbol{B}^{+}$ jest całkowitoliczbowa ($\boldsymbol{B} \in \mathbb{Z}^{m \times m}$, wartości wyznaczników są również całkowitoliczbowe). Wiadomo, że

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{B}} (\boldsymbol{B}^{+})^{T}.$$

Zatem jeżeli $\boldsymbol{A}$ jest unimodularna, to $|\det \boldsymbol{B}| = 1$ i w konsekwencji $\boldsymbol{B}^{-1}$ jest macierzą całkowitoliczbową.

Unimodularność

Twierdzenie

Niech $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ i $rank(\boldsymbol{A}) = m$. Wtedy następujące warunki są równoważne

Unimodularność

Twierdzenie

Niech $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ i rank$(\boldsymbol{A}) = m$. Wtedy następujące warunki są równoważne

1. *$\boldsymbol{A}$ jest unimodularna.*

Unimodularność

Twierdzenie

Niech $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ *i* $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$*. Wtedy następujące warunki są równoważne*

1. $\boldsymbol{A}$ *jest unimodularna.*
2. *Każde rozwiązanie bazowe dopuszczalne układu* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$*, jest całkowitoliczbowe dla dowolnego całkowitoliczbowego wektora prawych stron* $\boldsymbol{b}$*.*

Unimodularność

Twierdzenie

Niech $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ i $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = m$. Wtedy następujące warunki są równoważne

1. *$\boldsymbol{A}$ jest unimodularna.*
2. *Każde rozwiązanie bazowe dopuszczalne układu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$, jest całkowitoliczbowe dla dowolnego całkowitoliczbowego wektora prawych stron $\boldsymbol{b}$.*
3. *Każda podmacierz bazowa $\boldsymbol{B}$ macierzy $\boldsymbol{A}$ ma macierz odwrotną $\boldsymbol{B}^{-1}$ o elementach całkowitoliczbowych.*

Całkowita unimodularność

Definicja

Mówimy, że macierzy $\boldsymbol{A}$ *jest całkowicie unimodularna, jeśli każda jej podmacierz kwadratowa ma wyznacznik o wartości 0 lub +1 lub -1.*

Całkowita unimodularność

Definicja

Mówimy, że macierzy $\boldsymbol{A}$ jest całkowicie unimodularna, jeśli każda jej podmacierz kwadratowa ma wyznacznik o wartości 0 lub +1 lub -1.

Ponieważ każda podmacierz bazowa $\boldsymbol{B}$ macierzy całkowicie unimodularnej $\boldsymbol{A}$ ma wyznacznik o wartości -1 lub +1 (0 oznaczałoby osobliwość macierzy $\boldsymbol{B}$). Zatem następujący fakt jest prawdziwy.

Całkowita unimodularność

Definicja

Mówimy, że macierzy $\boldsymbol{A}$ *jest całkowicie unimodularna, jeśli każda jej podmacierz kwadratowa ma wyznacznik o wartości 0 lub +1 lub -1.*

Ponieważ każda podmacierz bazowa $\boldsymbol{B}$ macierzy całkowicie unimodularnej $\boldsymbol{A}$ ma wyznacznik o wartości -1 lub +1 (0 oznaczałoby osobliwość macierzy $\boldsymbol{B}$). Zatem następujący fakt jest prawdziwy.

Fakt

Każda całkowicie unimodularna macierz $\boldsymbol{A}$ *jest unimodularną.*

Całkowita unimodularność

Twierdzenie

*Macierz **A**, której elementy a_{ij} są równe $0, 1, -1$ dla wszystkich i i j, jest całkowicie unimodularna jeśli:*

1. *Każda kolumna zawiera nie więcej niż dwa elementy niezerowe.*
2. *Wiersze można rozbić na dwa podzbiory Q_1 i Q_2 takie, że*
   - 2.1 *jeśli kolumna zawiera dwa elementy niezerowe o takich samych znakach, to wiersze odpowiadające tym elementom należą do różnych podzbiorów,*
   - 2.2 *jeśli kolumna zawiera dwa elementy niezerowe o różnych znakach, to odpowiadające im wiersze należą do tego samego podzbioru.*

Całkowita unimodularność

Twierdzenie

Macierz $\mathbf{A}$, której elementy a_{ij} są równe $0, 1, -1$ dla wszystkich i i j, jest całkowicie unimodularna jeśli:

1. *Każda kolumna zawiera nie więcej niż dwa elementy niezerowe.*
2. *Wiersze można rozbić na dwa podzbiory Q_1 i Q_2 takie, że*
   2.1 *jeśli kolumna zawiera dwa elementy niezerowe o takich samych znakach, to wiersze odpowiadające tym elementom należą do różnych podzbiorów,*
   2.2 *jeśli kolumna zawiera dwa elementy niezerowe o różnych znakach, to odpowiadające im wiersze należą do tego samego podzbioru.*

Wniosek

Macierz incydencji grafu skierowanego jest całkowicie unimodularna.

Całkowita unimodularność

Twierdzenie

Macierz $\boldsymbol{A}$*, której elementy* a_{ij} *są równe* $0, 1, -1$ *dla wszystkich* i *i* j*, jest całkowicie unimodularna jeśli:*

1. *Każda kolumna zawiera nie więcej niż dwa elementy niezerowe.*
2. *Wiersze można rozbić na dwa podzbiory* Q_1 *i* Q_2 *takie, że*
   - 2.1 *jeśli kolumna zawiera dwa elementy niezerowe o takich samych znakach, to wiersze odpowiadające tym elementom należą do różnych podzbiorów,*
   - 2.2 *jeśli kolumna zawiera dwa elementy niezerowe o różnych znakach, to odpowiadające im wiersze należą do tego samego podzbioru.*

Wniosek

Macierz incydencji grafu skierowanego jest całkowicie unimodularna.

Warunek 1 jest spełniony – każda kolumna zawiera dokładnie -1, 1.

Całkowita unimodularność

Twierdzenie

*Macierz **A**, której elementy a_{ij} są równe $0, 1, -1$ dla wszystkich i i j, jest całkowicie unimodularna jeśli:*

1. *Każda kolumna zawiera nie więcej niż dwa elementy niezerowe.*
2. *Wiersze można rozbić na dwa podzbiory Q_1 i Q_2 takie, że*
   - 2.1 *jeśli kolumna zawiera dwa elementy niezerowe o takich samych znakach, to wiersze odpowiadające tym elementom należą do różnych podzbiorów,*
   - 2.2 *jeśli kolumna zawiera dwa elementy niezerowe o różnych znakach, to odpowiadające im wiersze należą do tego samego podzbioru.*

Wniosek

Macierz incydencji grafu skierowanego jest całkowicie unimodularna.

Warunek 1 jest spełniony – każda kolumna zawiera dokładnie -1, 1.
Warunek 2 jest spełniony Q_1 jest zbiorem wszystkich wierszy, $Q_2 = \emptyset$.

Wyznaczanie przepływu o minimalnych koszcie

Rozważmy problem przesłania towaru przez sieć, ze zbioru źródeł (punktów dostawy) V_1 do zbioru punktów odbioru V_2. Dla każdego $i \in V_1$ określony jest zapas towaru a_i, dla każdego $i \in V_2$ znane jest zapotrzebowanie na towar b_i. Dany jest również koszt c_{ij} przesłania jednostki towaru przez łuk (i, j) oraz pojemność łuku d_{ij}.
Zadanie polega na wyznaczeniu przepływu, którego sumaryczny koszt jest minimalny.

Wyznaczanie przepływu o minimalnych koszcie

Dana sieć $G = (V, E)$, $V = \{1, \ldots, m\}$. Rozbijamy V na V_1 (źródła), V_2 (punkty pośrednie), V_3 (punkty odbioru). Dla każdego $i \in V$ definiujemy

$$S(i) = \{j \mid (i,j) \in E\} \text{ i } P(i) = \{j \mid (j,i) \in E\}$$

$$\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j \in S(i)} x_{ij} - \sum_{j \in P(i)} x_{ji} \begin{cases} \leqslant a_i & i \in V_1, \\ = 0 & i \in V_2, \\ \leqslant -b_i & i \in V_3, \end{cases}$$
$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}. \quad (i,j) \in E.$$

Macierz powyższych ograniczeń jest całkowicie unimodularna.

Zadanie transportowe (z pojemnościami)

Wystarczy przyjąć $V_2 = \emptyset$, $P(i) = \emptyset$ dla $i \in V_1$, $S(i) = \emptyset$ dla $i \in V_3$.

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j\in S(i)} x_{ij} \leqslant a_i, & \qquad i \in V_1, \\ \sum_{j\in P(i)} x_{ji} \geqslant b_i, & \qquad i \in V_3, \\ 0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}, & \qquad (i,j) \in E. \end{aligned}$$

Zadanie przydziału o minimalnych koszcie

Wystarczy przyjąć $V_2 = \emptyset$, $P(i) = \emptyset$ dla $i \in V_1$, $S(i) = \emptyset$ dla $i \in V_3$. Jest przypadek szczególny zadania transportowego: $d_{ij} = \infty$ dla $(i,j) \in E$, $a_i = 1$ dla $i \in V_1$, $b_i = 1$ dla $i \in V_3$ oraz $|V_1| = |V_3|$.

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in S(i)} x_{ij} &= 1, && i \in V_1,\\
\sum_{j\in P(i)} x_{ji} &= 1, && i \in V_3,\\
x_{ij} &\geqslant 0, && (i,j) \in E.
\end{aligned}$$

Zadanie najkrótszej ścieżki

Wystarczy przyjąć $V_1 = \{1\}$, $V_3 = \{m\}$, $a_1 = 1$, $b_m = 1$, $d_{ij} = 1$ dla $(i, j) \in E$.

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j \in S(i)} x_{ij} - \sum_{j \in P(i)} x_{ji} \begin{cases} = 1 & i = 1, \\ = 0 & i \in V_2, \\ = -1 & i = m, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad (i, j) \in E.$$

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książek.

- Narsingh Deo, Janusz S. Kowalik, Maciej M. Sysło.
  Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku PASCAL.
  Wydawnictwa Naukowego PWN, 1999.
- Robert S. Garfinkel, George L. Nemhauser.
  Programowanie całkowitoliczbowe.
  PWN, 1978.
- Edward M. Reingold, Jürg Nievergelt, Narsingh Deo.
  Algorytmy kombinatoryczne.
  PWN, 1985.