„ZPR PWr – Zintegrowany Program Rozwoju Politechniki Wrocławskiej"

1 Metoda podziału i ograniczeń

Zagadnienie komiwojażera

Fakt 1. *Cykl Hamiltona zawiera dokładnie jeden element z każdego wiersza i dokładnie jeden element z każdej kolumny macierzy kosztów.*

Fakt 2. *Jeśli odejmiemy stałą od wszystkich elementów jakiegoś wiersza lub jakiejś kolumny macierzy kosztów, to koszt każdego cyklu Hamiltona zmniejszy się dokładnie o tę stałą (względny koszt wszystkich cykli pozostanie taki sam).*

Fakt 3. *Jeżeli wielokrotnie zastosujemy fakt 2 aż otrzymamy w każdym wierszu i każdej kolumnie co najmniej jedno zero, a pozostałe elementy macierzy kosztów są nieujemne, to całkowita suma odjętych stałych jest* **dolnym ograniczeniem** *długości jakiegokolwiek cyklu Hamiltona.*

Zbiór rozwiązań będziemy dzielić na dwa podzbiory:

- złożony z rozwiązań zawierających wyróżniony łuk,
- złożony z rozwiązań nie zawierających wyróżnionego łuku.

Zilustrujmy algorytm podziału i ograniczeń dla problemu na przykładzie. Rozważmy macierz kosztów

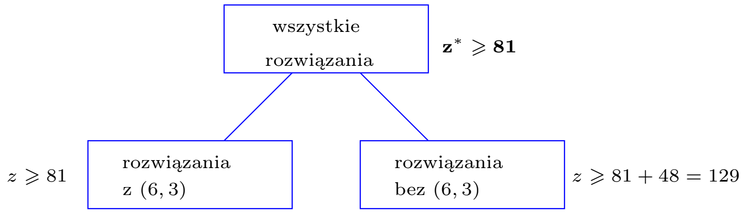
$$\begin{pmatrix} \infty & \mathbf{3} & 93 & 13 & 33 & 9 \\ \mathbf{4} & \infty & 77 & 42 & 21 & 16 \\ 45 & 17 & \infty & 36 & \mathbf{16} & 28 \\ 39 & 90 & 80 & \infty & 56 & \mathbf{7} \\ 28 & 46 & 88 & \mathbf{33} & \infty & \mathbf{25} \\ \mathbf{3} & 88 & \mathbf{18} & 46 & 92 & \infty \end{pmatrix}$$

Odejmujemy 3, 4, 16, 7, 25 i 3 od elementów kolejnych wierszy oraz 15 i 8 od elementów kolumny trzeciej i czwartej.

Zredukowana macierz ma postać

$$\begin{pmatrix} \infty & \mathbf{0} & 75 & 2 & 30 & 9 \\ \mathbf{0} & \infty & 58 & 30 & 17 & 12 \\ 29 & 1 & \infty & 12 & \mathbf{0} & 12 \\ 32 & 83 & 58 & \infty & 49 & \mathbf{0} \\ 3 & 21 & 48 & \mathbf{0} & \infty & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 85 & 0 & 35 & 89 & \infty \end{pmatrix}$$

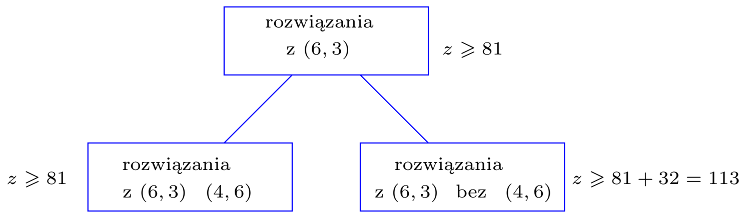
Dolne ograniczenie na długość rozwiązań jest równe **81**.
Podział zbioru rozwiązań dokonujemy za pomocą łuku $(\mathbf{6}, \mathbf{3})$, ponieważ *ten wybór powoduje największy wzrost dolnego ograniczenia w prawym poddrzewie, czyli* 48.



bez wiersza nr 6 i kolumny nr 3

$$\begin{pmatrix} \infty & \mathbf{0} & 2 & 30 & 9 \\ \mathbf{0} & \infty & 30 & 17 & 12 \\ 29 & 1 & 12 & \mathbf{0} & \infty \\ 32 & 83 & \infty & 49 & 0 \\ 3 & 21 & \mathbf{0} & \infty & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \infty & \mathbf{0} & \mathbf{27} & 2 & 30 & 9 \\ \mathbf{0} & \infty & \mathbf{10} & 30 & 17 & 12 \\ 29 & 1 & \infty & 12 & \mathbf{0} & 12 \\ 32 & 83 & \mathbf{10} & \infty & 49 & \mathbf{0} \\ 3 & 21 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \infty & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 85 & \infty & 35 & 89 & \infty \end{pmatrix}$$

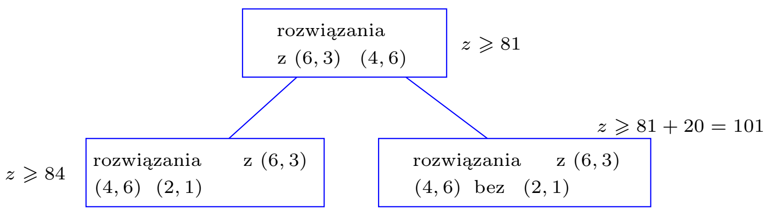
Dzielimy zbiór w lewym poddrzewie za pomocą łuku $(\mathbf{4}, \mathbf{6})$. Ten wybór powoduje wzrost dolnego ograniczenia w prawym poddrzewie o **32.**



bez wierszy nr 4, 6 i kolumn nr 3, 6

$$\begin{pmatrix} \infty & \mathbf{0} & 2 & 30 \\ 0 & \infty & 30 & 17 \\ 29 & 1 & \infty & \mathbf{0} \\ 3 & 21 & \mathbf{0} & \infty \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \infty & \mathbf{0} & 2 & 30 & 9 \\ \mathbf{0} & \infty & 30 & 17 & 12 \\ 29 & 1 & 12 & \mathbf{0} & \infty \\ \mathbf{0} & \mathbf{51} & \infty & \mathbf{17} & \infty \\ 3 & 21 & \mathbf{0} & \infty & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Dzielimy zbiór w lewym poddrzewie za pomocą łuku $(\mathbf{2}, \mathbf{1})$. Wybór powoduje wzrost dolnego ograniczenia w prawym poddrzewie o **17+3=20.** Odejmujemy od wiersza 17, od pierwszej kolumny 3. Zabraniamy przejścia przez łuk $(3,4)$ (lewe poddrzewo), jeśli w rozwiązaniu są $(4,6)$ i $(6,3)$.



bez wierszy nr 2, 4, 6 i kolumn nr 1, 3, 6

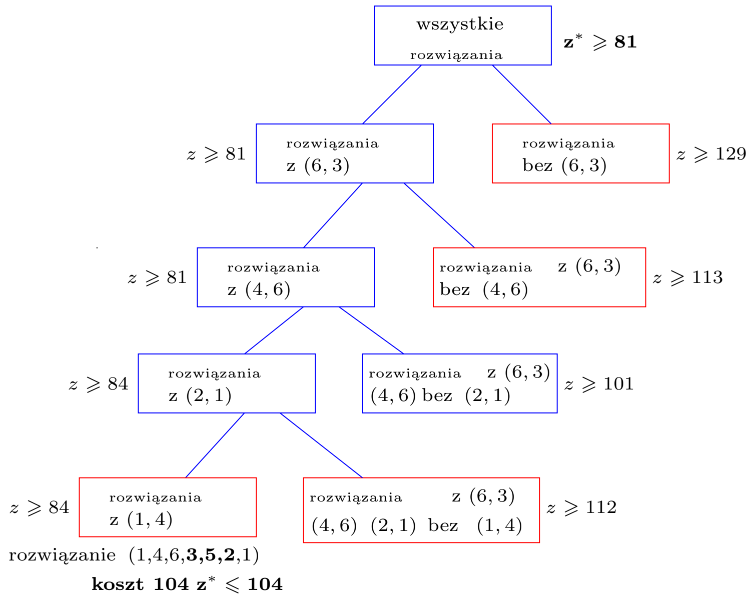
$$\begin{pmatrix} \infty & 2 & 30 \\ 1 & \infty & \mathbf{0} \\ 21 & \mathbf{0} & \infty \end{pmatrix}$$

można polepszyć dolne ograniczenie o 3

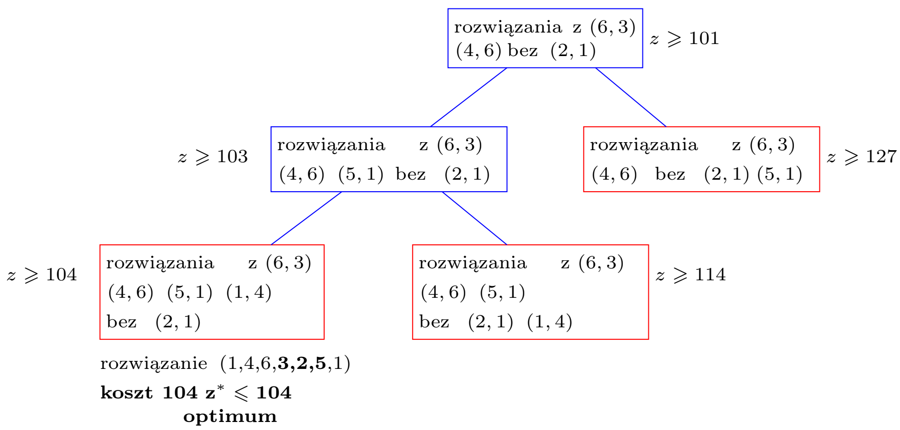
$$z \geqslant 81 + 3 = 84$$

$$\begin{pmatrix} \infty & \mathbf{0} & \mathbf{28} \\ \mathbf{0} & \infty & \mathbf{0} \\ \mathbf{20} & \mathbf{0} & \infty \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \infty & \mathbf{0} & 2 & 30 \\ \infty & \infty & \mathbf{13} & \mathbf{0} \\ \mathbf{26} & 1 & \infty & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 21 & \mathbf{0} & \infty \end{pmatrix}$$



Należy jeszcze rozpatrzyć rozwiązanie nie zawierające łuku $(2, 1)$.



Otrzymaliśmy dwa rozwiązania optymalne o koszcie równym 104.

Zagadnienie plecakowe ZP

Sformułowanie zagadnienie w postaci **PLC**

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{l} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leqslant b, \\ x_i \in \{0,1\} \text{ dla } i = 1,\dots,n. \end{array}$$

Rozwiązanie następującego problemu linowego programowania (relaksacji) dostarcza nam **górnego ograniczenia** wartości funkcji celu w **ZP**.

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max \tag{1}$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{l} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leqslant b, \\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \text{ dla } i = 1,\dots,n. \end{array} \tag{2}$$

Problem (1)- (2) można użyć do konstrukcji algorytmu podziału i ograniczeń. Poniżej podamy algorytm kombinatoryczny rozwiązujący efektywnie ten problem.

Jak efektywnie rozwiązań relaksację ZP (problem programowania liniowego)?

- Uporządkuj przedmioty w **nierosnącym** porządku względem stosunków $\frac{c_i}{a_i}$, $\frac{c_1}{a_1} \geqslant \cdots \geqslant \frac{c_n}{a_n}$.
- Włóż do plecaka przedmiot o największym stosunku. (najbardziej atrakcyjny).

  Powtarzaj proces dopóki plecak nie jest pełny.

Otrzymujemy rozwiązanie

$$x_1 = \cdots = x_r = 1, x_{r+1} = \cdots = x_n = 0,$$

dla którego

$$a_1x_1 + \cdots + a_rx_r \leqslant b \text{ i } a_1x_1 + \cdots + a_{r+1}x_{r+1} > b.$$

$$x_1^* = \cdots = x_r^* = 1, x_{r+1}^* = \frac{1}{a_{r+1}}(b - a_1 - \cdots - a_r), x_{r+2}^* = \cdots = x_n^* = 0 \tag{3}$$

Twierdzenie 1. *Rozwiązanie (3) jest rozwiązanie optymalnym problem (1)-(2).*

Dowód. Jest oczywiste, że $\boldsymbol{x}^*$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla (1)- (2). Aby pokazać $\boldsymbol{x}^*$ jest rozwiązaniem optymalnym, wystarczy wyznaczyć rozwiązanie dualne $\boldsymbol{y}^*$, dla którego

$$c_1x_1^* + \cdots + c_nx_n^* = b_1y_1^* + y_2^* + \cdots + y_{n+1}^*.$$

Model dualny do (1)- (2) jest postaci:

$$b_1y_1 + y_2 + \cdots + y_{n+1} \to \min$$

$$\begin{aligned} a_1y_1 + y_2 &\geqslant c_1 \\ &\vdots \\ a_ny_1 + y_{n+1} &\geqslant c_n \\ y_1, \ldots, y_{n+1} &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} &y_1^* = \tfrac{c_{r+1}}{a_{r+1}}, y_k^* = c_{k-1} - a_{k-1}\tfrac{c_{r+1}}{a_{r+1}} \quad k = 2, \ldots, r+1, \\ &y_k^* = 0 \quad k = r+2, \ldots, n+1 \end{aligned}$$

jest dopuszczalne przy założeniu $\frac{c_1}{a_1} \geqslant \cdots \geqslant \frac{c_n}{a_n}$ i spełnia

$$c_1x_1^* + \cdots + c_nx_n^* = b_1y_1^* + y_2^* + \cdots + y_{n+1}^*.$$

□

2 Unimodularność

Problem **PLC**

$$\begin{aligned} &\max \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{x} \geqslant 0 \text{ i całkowity} \end{aligned}$$

Problem **LP**

$$\begin{aligned} &\max \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Załóżmy, że $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $\text{rank}(\boldsymbol{A}) = m$ i $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$.

Kiedy problem PLC można rozwiązać rozwiązując zadanie LP?

Kiedy rozwiązanie optymalne zadania **LP** ma wartości całkowitoliczbowe?

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \;\Leftrightarrow\; [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

Rozwiązaniem **bazowym** jest

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},\;\; \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0},$$

gdzie $\boldsymbol{B}$ jest podmacierzą bazową macierzy $\boldsymbol{A}$.

Jeżeli $\boldsymbol{B}^{-1}$ jest macierzą całkowitoliczbową, to $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}$ jest całkowitoliczbowe.

Definicja 1. *Mówimy, że macierzy $\boldsymbol{A}$ jest **unimodularna**, jeśli każda jej podmacierz bazowa $\boldsymbol{B}$ ma wyznacznik o wartości +1 lub -1 ($|\det \boldsymbol{B}| = 1$).*

Zauważmy, że $\boldsymbol{B}$ jest macierzą nieosobliwą całkowitoliczbową ($\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$), wówczas macierz dopełnień algebraicznych $\boldsymbol{B}^{+}$ jest całkowitoliczbowa ($\boldsymbol{B} \in \mathbb{Z}^{m\times m}$, wartości wyznaczników są również całkowitoliczbowe). Wiadomo, że

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{B}}(\boldsymbol{B}^{+})^{T}.$$

Zatem jeżeli $\boldsymbol{A}$ jest unimodularna, to $|\det \boldsymbol{B}| = 1$ i w konsekwencji $\boldsymbol{B}^{-1}$ jest macierzą całkowitoliczbową.

Twierdzenie 2. *Niech $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ i $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$. Wtedy następujące warunki są równoważne*

1. *$\boldsymbol{A}$ jest unimodularna.*
2. *Każde rozwiązanie bazowe dopuszczalne układu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$, jest całkowitoliczbowe dla dowolnego całkowitoliczbowego wektora prawych stron $\boldsymbol{b}$.*
3. *Każda podmacierz bazowa $\boldsymbol{B}$ macierzy $\boldsymbol{A}$ ma macierz odwrotną $\boldsymbol{B}^{-1}$ o elementach całkowitoliczbowych.*

Definicja 2. *Mówimy, że macierzy $\boldsymbol{A}$ jest **całkowicie unimodularna**, jeśli każda jej podmacierz kwadratowa ma wyznacznik o wartości 0 lub +1 lub -1.*

Ponieważ każda podmacierz bazowa $\boldsymbol{B}$ macierzy całkowicie unimodularnej $\boldsymbol{A}$ ma wyznacznik o wartości -1 lub +1 (0 oznaczałoby osobliwość macierzy $\boldsymbol{B}$). Zatem następujący fakt jest prawdziwy.

Fakt 4. *Każda całkowicie unimodularna macierz $\boldsymbol{A}$ jest unimodularną.*

Twierdzenie 3. *Macierz $\boldsymbol{A}$, której elementy a_{ij} są równe $0, 1, -1$ dla wszystkich i i j, jest całkowicie unimodularna jeśli:*

1. *Każda kolumna zawiera nie więcej niż dwa elementy niezerowe.*
2. *Wiersze można rozbić na dwa podzbiory Q_1 i Q_2 takie, że*
   (a) *jeśli kolumna zawiera dwa elementy niezerowe o takich samych znakach, to wiersze odpowiadające tym elementom należą do różnych podzbiorów,*
   (b) *jeśli kolumna zawiera dwa elementy niezerowe o różnych znakach, to odpowiadające im wiersze należą do tego samego podzbioru.*

Wniosek 1. *Macierz incydencji grafu skierowanego jest całkowicie unimodularna.*

Warunek 1 jest spełniony – każda kolumna zawiera dokładnie -1, 1.
Warunek 2 jest spełniony Q_1 jest zbiorem wszystkich wierszy, $Q_2 = \emptyset$.

2.1 Wyznaczanie przepływu o minimalnych koszcie

Rozważmy problem przesłania towaru przez sieć, ze zbioru źródeł (punktów dostaw) V_1 do zbioru punktów odbioru V_2. Dla każdego $i \in V_1$ określony jest zapas towaru a_i, dla każdego $i \in V_2$ znane jest zapotrzebowanie na towar b_i. Dany jest również koszt c_{ij} przesłania jednostki towaru przez łuk (i, j) oraz pojemność łuku d_{ij}.

Zadanie polega na wyznaczeniu przepływu, którego sumaryczny koszt jest minimalny.

Dana sieć $G = (V, E)$, $V = \{1, \ldots, m\}$. Rozbijamy V na V_1 (źródła), V_2 (punkty pośrednie), V_3 (punkty odbioru). Dla każdego $i \in V$ definiujemy

$$S(i) = \{j \mid (i, j) \in E\} \text{ i } P(i) = \{j \mid (j, i) \in E\}$$

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{j\in P(i)} x_{ji} \begin{cases} \leqslant a_i & i \in V_1, \\ = 0 & i \in V_2, \\ \leqslant -b_i & i \in V_3, \end{cases}$$
$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}. \quad (i, j) \in E.$$

Macierz powyższych ograniczeń jest całkowicie unimodularna.

2.1.1 Przypadki szczególne

Zadanie transportowe (z pojemnościami)

Wystarczy przyjąć $V_2 = \emptyset$, $P(i) = \emptyset$ dla $i \in V_1$, $S(i) = \emptyset$ dla $i \in V_3$.

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in S(i)} x_{ij} \leqslant a_i, &\qquad i \in V_1,\\
\sum_{j\in P(i)} x_{ji} \geqslant b_i, &\qquad i \in V_3,\\
0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}, &\qquad (i,j) \in E.
\end{aligned}$$

Zadanie przydziału o minimalnych koszcie

Wystarczy przyjąć $V_2 = \emptyset$, $P(i) = \emptyset$ dla $i \in V_1$, $S(i) = \emptyset$ dla $i \in V_3$. Jest przypadek szczególny zadania transportowego: $d_{ij} = \infty$ dla $(i,j) \in E$, $a_i = 1$ dla $i \in V_1$, $b_i = 1$ dla $i \in V_3$ oraz $|V_1| = |V_3|$.

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in S(i)} x_{ij} = 1, &\qquad i \in V_1,\\
\sum_{j\in P(i)} x_{ji} = 1, &\qquad i \in V_3,\\
x_{ij} \geqslant 0, &\qquad (i,j) \in E.
\end{aligned}$$

Zadanie najkrótszej ścieżki

Wystarczy przyjąć $V_1 = \{1\}$, $V_3 = \{m\}$, $a_1 = 1$, $b_m = 1$, $d_{ij} = 1$ dla $(i,j) \in E$.

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{j\in P(i)} x_{ji} \begin{cases} = 1 & i = 1,\\ = 0 & i \in V_2,\\ = -1 & i = m,\end{cases}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad (i,j) \in E.$$

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książek [1, 2, 3] (rozdział 1 na podstawie [1, 3], natomiast rozdział 2 na podstawie [2]).

Literatura

[1] Narsingh Deo, Janusz S. Kowalik, Maciej M. Sysło. *Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku PASCAL.* Wydawnictwa Naukowego PWN, 1999.

[2] Robert S. Garfinkel, George L. Nemhauser. *Programowanie całkowitoliczbowe.* PWN, 1978.

[3] Edward M. Reingold, Jürg Nievergelt, Narsingh Deo. *Algorytmy kombinatoryczne.* PWN, 1985.