Metody optymalizacji
Wykład nr 12

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska

Relaksacja Lagrange'a

- Podejście oparte na dekompozycji.
  - Łatwe ograniczenia.
  - "Niewygodne ograniczenia".

"Niewygodne ograniczenia" dodaje się do funkcji celu.

Relaksacja Lagrange'a

- Podejście oparte na dekompozycji.
  - Łatwe ograniczenia.
  - "Niewygodne ograniczenia".

  "Niewygodne ograniczenia" dodaje się do funkcji celu.
- Otrzymanie dolnego ograniczenia na optymalną wartość funkcji celu problemu minimalizacyjnego.

Relaksacja Lagrange'a

- Podejście oparte na dekompozycji.
  - Łatwe ograniczenia.
  - "Niewygodne ograniczenia".

  "Niewygodne ograniczenia" dodaje się do funkcji celu.
- Otrzymanie dolnego ograniczenia na optymalną wartość funkcji celu problemu minimalizacyjnego.
- W wielu przypadkach dolne ograniczenie jest bliskie wartości rozwiązania optymalnego.

Problem najkrótszej ścieżki z ograniczeniem czasowym (Constrained Shortest Path) CSP

Dana jest sieć $G = (V, A)$ oraz dwa wyróżnione wierzchołki s i t. Z każdym łukiem sieci $(i, j) \in A$ związane są dwa atrybuty koszt c_{ij} i czas przejazdu t_{ij}.
Chcemy znaleźć najtańszą ścieżkę od s do t, której czas przejazdu nie przekracza zadanego T.

Model CSP

$$z^* = \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

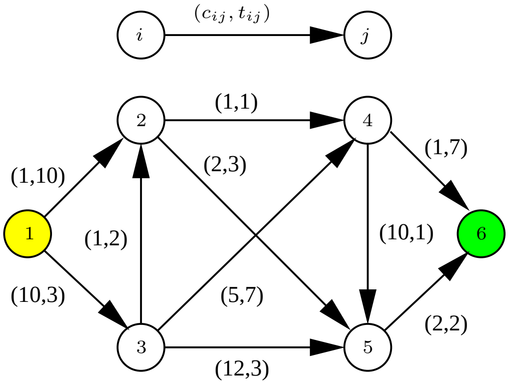
$$\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{j\in P(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s, \\ -1 & i = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij} \leqslant T \quad \text{Niewygodne ograniczenie},$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A.$$

CSP - przykład

Rozważmy przykład CSP, w którym należy znaleźć najtańszą ścieżkę od wierzchołka 1 do 6, której czas przejazdu nie przekracza 10.



CSP - przykład...

- Problem najkrótszej ścieżki jest wielomianowo rozwiązywalny (łatwy).
- Problem najkrótszej ścieżki z ograniczeniem czasowym jest *NP*-trudny.

CSP - przykład...

- Problem najkrótszej ścieżki jest wielomianowo rozwiązywalny (łatwy).
- Problem najkrótszej ścieżki z ograniczeniem czasowym jest *NP*-trudny.

Mówimy, że problem optymalizacyjny P' jest relaksacją problemu optymalizacyjnego P, jeżeli P' powstaje z P przez eliminacje jednego lub więcej ograniczeń.

Pierwsze podejście do CSP – odrzucenie ograniczenia

Rozwiązać problem **CSP** bez "niewygodnego ograniczenia”.

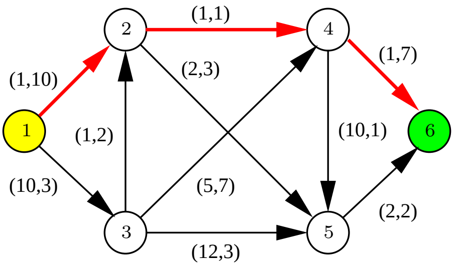
$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{j\in P(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s, \\ -1 & i = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A.$$

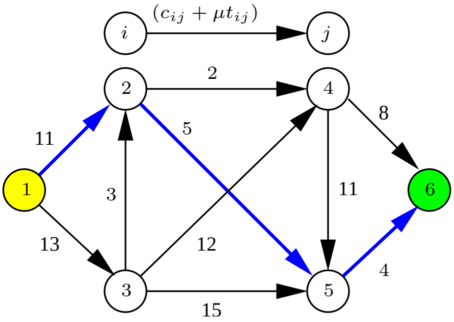
Jeżeli rozwiązanie spełnia ograniczenie czasowe, wówczas jest on rozwiązaniem optymalnym problemu **CSP**.

Pierwsze podejście do CSP – odrzucenie ograniczenia



Otrzymana najkrótsza ścieżka ma długość 3 i czas przejazdu równy 18 – nie jest rozwiązanie dopuszczalnym **CSP**. Jej długość jest dolnym ograniczeniem na długość optymalnej ścieżki dla **CSP**.

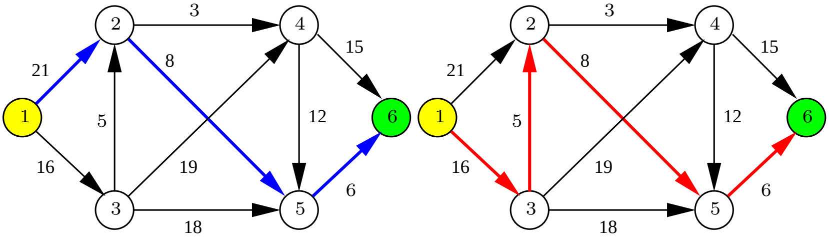
Drugie podejście do CSP – wprowadzenie kar



$\mu = 1$. Koszt optymalnej ścieżki dla zmodyfikowanych wag jest 5, a czas przejazdu jest równy 15. Zatem ścieżka jest niedopuszczalna.

Drugie podejście do CSP – wprowadzenie kar

Po zwiększeniu μ, $\mu = 2$ otrzymujemy dwie ścieżki, których zmodyfikowany koszt, $\sum_{(i,j)\in p}(c_{ij} + \mu t_{ij})$, jest 35.



1. 1 – 2 – 5 – 6 ma czas przejazdu 15 (niedopuszczalna dla **CSP**).
2. 1 – 3 – 2 – 5 – 6 ma czas przejazdu 10 jest dopuszczalna dla **CSP** oraz jest rozwiązaniem optymalnym dla **CSP**.

Analiza parametryczna

μ	$\sum_{(i,j)\in p} (c_{ij} + \mu t_{ij})$	$\sum_{(i,j)\in p} c_{ij}$	$\sum_{(i,j)\in p} t_{ij}$	$\sum_{(i,j)\in p} (c_{ij} + \mu t_{ij}) - \mu 10$
0	3	3	18	3
1	20	5	15	10
2	35	5	15	15
3	45	15	10	15
4	55	15	10	15
5	64	24	8	14
6	72	24	8	12
7	80	24	8	10
8	88	24	8	8

Zasada ograniczania

Oznaczmy przez $c_p = \sum_{(i,j)\in p} c_{ij}$ koszt ścieżki p oraz przez $t_p = \sum_{(i,j)\in p} t_{ij}$ czas przejazdu przez ścieżkę p. Dla ustalonego μ i ścieżki p zmodyfikowany koszt jest równy

$$c_p(\mu) = \sum_{(i,j)\in p} (c_{ij} + \mu t_{ij}) = c_p + \mu t_p.$$

Własność (Zasada ograniczania (bounding principle))

*Niech $\mu \geqslant 0$ i niech p^* będzie najtańszą ścieżką w sieci ze zmodyfikowanymi kosztami $c_{ij} + \mu t_{ij}$, wówczas $c_{p^*}(\mu) - \mu T$ jest dolnym ograniczeniem długość ścieżki **CSP**.*

Zasada ograniczania

Dowód.
Ścieżka p^* jest najtańsza,

$\square$

Zasada ograniczania

Dowód.

Ścieżka p^* jest najtańsza, zatem

$$c_{p^*}(\mu) \leqslant c_p + \mu t_p \quad \text{dla dowolnej ścieżki } p$$

$\square$

Zasada ograniczania

Dowód.

Ścieżka p^* jest najtańsza, zatem

$$c_{p^*}(\mu) \leqslant c_p + \mu t_p \quad \text{dla dowolnej ścieżki } p$$

w szczególności ścieżki **CSP** $p^{'}$ $(t_{p'} \leqslant T)$.

$\square$

Zasada ograniczania

Dowód.

Ścieżka p^* jest najtańsza, zatem

$$c_{p^*}(\mu) \leqslant c_p + \mu t_p \quad \text{dla dowolnej ścieżki } p$$

w szczególności ścieżki **CSP** $p^{'}$ $(t_{p'} \leqslant T)$.

$$c_{p^*}(\mu) \leqslant c_{p'} + \mu t_{p'} \leqslant c_{p'} + \mu T$$
$$c_{p^*}(\mu) - \mu T \leqslant c_{p'}.$$

□

W kierunku relaksacji Lagrange'a

$$z^* = \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{j\in P(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s, \\ -1 & i = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} \leqslant T$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A.$$

W kierunku relaksacji Lagrange'a

$$z^* = \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{j\in P(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s, \\ -1 & i = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij} \leqslant T$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i,j) \in A.$$

Dla każdego $\mu \geqslant 0$ zastępujemy funkcję celu **CSP** przez

$$z(\mu) = \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} + \mu\Big(\sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij} - T\Big) = \sum_{(i,j)\in A} (c_{ij} + \mu t_{ij}) x_{ij} - \mu T.$$

Zastosowanie relaksacji Lagrange'a do CSP

$$L(\mu) = \min \sum_{(i,j)\in A} (c_{ij} + \mu t_{ij}) x_{ij} - \mu T$$

$$\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{j\in P(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s, \\ -1 & i = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A.$$

Zastosowanie relaksacji Lagrange'a do CSP

$$L(\mu) = \min \sum_{(i,j)\in A} (c_{ij} + \mu t_{ij}) x_{ij} - \mu T$$

$$\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{j\in P(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s, \\ -1 & i = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A.$$

Twierdzenie

Niech p^* będzie najtańszą ścieżką w sieci ze zmodyfikowanymi kosztami $c_{ij} + \mu t_{ij}$, dla której

$$c_{p^*}(\mu) = c_{p^*} + \mu T,$$

to p^* jest optymalna.

Zastosowanie relaksacji Lagrange'a do CSP

$$L(\mu) = \min \sum_{(i,j)\in A} (c_{ij} + \mu t_{ij}) x_{ij} - \mu T$$

$$\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{j\in P(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s, \\ -1 & i = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A.$$

Twierdzenie

Niech p^* będzie najtańszą ścieżką w sieci ze zmodyfikowanymi kosztami $c_{ij} + \mu t_{ij}$, dla której

$$c_{p^*}(\mu) = c_{p^*} + \mu T,$$

to p^* jest optymalna.

Dowód.

$c_{p^*}(\mu) - \mu T = L(\mu) \leqslant z^* \leqslant c_{p^*} = c_{p^*}(\mu) - \mu T.$

Ograniczenia równościowe

$$
\begin{aligned}
z^* &= \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x} &\in \mathbb{X}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\mu}) &= \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \\
\boldsymbol{x} &\in \mathbb{X}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Własność (Zasada ograniczania (bounding principle))

Dla dowolnego wektora (mnożników) $\boldsymbol{\mu}$, wartość $L(\boldsymbol{\mu})$ jest dolnym ograniczeniem optymalnej wartości funkcji celu z^* problemu (1).

Zasada ograniczania (bounding principle)

Dowód.

Rozwiązanie dopuszczalne (1) spełnia $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

$\square$

Zasada ograniczania (bounding principle)

Dowód.

Rozwiązanie dopuszczalne (1) spełnia $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.
Zatem dla dowolnego $\boldsymbol{\mu}$

$$z^* = \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}\} = \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}\}$$

$\square$

Zasada ograniczania (bounding principle)

Dowód.

Rozwiązanie dopuszczalne (1) spełnia $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.
Zatem dla dowolnego $\boldsymbol{\mu}$

$$z^* = \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}\} = \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}\}$$

Usuwając $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ nie zwiększymy funkcji celu,
$z^* \geqslant \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}\} = L(\boldsymbol{\mu})$. □

Problem mnożników Lagrange'a

Dla dowolnego μ, $L(\mu)$ jest dolnym ograniczeniem na wartość funkcji celu problemu (1). Aby otrzymać najlepsze dolne ograniczenie (im wyższe tym lepsze) musimy rozwiązać Problem mnożników Lagrange'a

$$L^* = \max_{\mu} L(\mu).$$

Problem mnożników Lagrange'a

Dla dowolnego μ, $L(\mu)$ jest dolnym ograniczeniem na wartość funkcji celu problemu (1). Aby otrzymać najlepsze dolne ograniczenie (im wyższe tym lepsze) musimy rozwiązać Problem mnożników Lagrange'a

$$L^* = \max_{\mu} L(\mu).$$

Z zasady ograniczania mamy

$$L^* \leqslant z^*.$$

Problem mnożników Lagrange'a

Dla dowolnego μ, $L(\mu)$ jest dolnym ograniczeniem na wartość funkcji celu problemu (1). Aby otrzymać najlepsze dolne ograniczenie (im wyższe tym lepsze) musimy rozwiązać Problem mnożników Lagrange'a

$$L^* = \max_{\mu} L(\mu).$$

Z zasady ograniczania mamy

$$L^* \leqslant z^*.$$

Dla dowolnego wyboru μ i dowolnego rozwiązania dopuszczalnego $\boldsymbol{x}$ dostajemy

$$L(\mu) \leqslant L^* \leqslant z^* \leqslant \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}.$$

Problem mnożników Lagrange'a

Dla dowolnego μ, $L(\mu)$ jest dolnym ograniczeniem na wartość funkcji celu problemu (1). Aby otrzymać najlepsze dolne ograniczenie (im wyższe tym lepsze) musimy rozwiązać Problem mnożników Lagrange'a

$$L^* = \max_{\mu} L(\mu).$$

Z zasady ograniczania mamy

$$L^* \leqslant z^*.$$

Dla dowolnego wyboru μ i dowolnego rozwiązania dopuszczalnego $\boldsymbol{x}$ dostajemy

$$L(\mu) \leqslant L^* \leqslant z^* \leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.$$

Powyższy warunek pozwala ocenić jakość rozwiązania dopuszczalnego.

$$(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - L(\mu))/L(\mu).$$

Test optymalności

Własność (Test optymalności)

- *Niech $\boldsymbol{\mu}$ będzie wektorem mnożników, a $\mathbf{x}$ będzie rozwiązaniem dopuszczalnym problemu (1) spełniającym $L(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Wtedy $L(\boldsymbol{\mu})$ jest optymalną wartością funkcji celu problemu mnożników Lagrange'a ($L(\boldsymbol{\mu}) = L^*$) oraz $\mathbf{x}$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu (1).*

Test optymalności

Własność (Test optymalności)

- *Niech $\boldsymbol{\mu}$ będzie wektorem mnożników, a $\mathbf{x}$ będzie rozwiązaniem dopuszczalnym problemu (1) spełniającym $L(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Wtedy $L(\boldsymbol{\mu})$ jest optymalną wartością funkcji celu problemu mnożników Lagrange'a ($L(\boldsymbol{\mu}) = L^*$) oraz $\mathbf{x}$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu (1).*
- *Dla pewnego $\boldsymbol{\mu}$ rozwiązanie $\mathbf{x}^*$ problemu (2) (relaksacja Lagrange'a) jest rozwiązaniem dopuszczalnym problemu (1), wtedy $\mathbf{x}^*$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu (1) i $\boldsymbol{\mu}$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu mnożników Lagrange'a.*

Ograniczenia nierównościowe

$$\begin{aligned} z^* &= \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &\leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\in \mathbb{X} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\mu}) &= \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{x} &\in \mathbb{X} \end{aligned} \tag{4}$$

W tym przypadku Problem mnożników Lagrange'a ma postać

$$L^* = \max_{\boldsymbol{\mu} \geqslant \boldsymbol{0}} L(\boldsymbol{\mu}).$$

Test optymalności

Może jednak się zdażyć, że *drugi warunek testu optymalności nie będzie spełniony* ($\boldsymbol{x}^*$ optymalny dla (4), dopuszczalny dla (3), nie optymalny dla (3)).
Rozwiązanie musi spełniać warunek komplementarności

$$\boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = 0.$$

Podsumowanie

- Każda wartość $L(\mu)$ jest dolnym ograniczeniem optymalnej wartości funkcji celu z^*.
- L^* jest najlepszym dolnym ograniczeniem.
- Jeżeli $L(\mu) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, to $L^* = z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.
- L^* jest użytecznym w heurystykach i w metodzie podziału i ograniczeń.

Uogólnione zagadnienie przydziału (Generalized assignment problem)

Problem polega na przydziale $|I|$ "obiektów" do $|J|$ "pudełek". Przydzielamy obiekt dokładnie do jednego pudełka. Jeżeli przydzieliliśmy obiekt i do pudelka j wówczas obiekt i zużywa a_{ij} jednostek danego "zasobu" w tym pudelku oraz koszt przydziału równy jest c_{ij}. Łączna wielkość dostępnego zasobu pudełka j jest równa d_j. Szukamy dopuszczalnego przydziału, którego łączny koszt jest minimalny.

Uogólnione zagadnienie przydziału (Generalized assignment problem)

Problem polega na przydziale $|I|$ "obiektów" do $|J|$ "pudełek". Przydzielamy obiekt dokładnie do jednego pudełka. Jeżeli przydzieliliśmy obiekt i do pudelka j wówczas obiekt i zużywa a_{ij} jednostek danego "zasobu" w tym pudelku oraz koszt przydziału równy jest c_{ij}. Łączna wielkość dostępnego zasobu pudełka j jest równa d_j. Szukamy dopuszczalnego przydziału, którego łączny koszt jest minimalny.

PRZYKŁAD Szeregowanie zadań – obiektami są zadania, pudełkami są maszyny; a_{ij} jest czasem wykonania zadania i na maszynie j, a d_j jest łącznym czasem dostępności maszyny j.

Uogólnione zagadnienie przydziału

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \text{ dla } i \in I \tag{5}$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_{ij} \leqslant d_j \text{ dla } j \in J \tag{6}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in I, j \in J. \tag{7}$$

$x_{ij} = 1$ jeżeli przydzielamy obiekt i do pudelka j; $x_{ij} = 0$ w przeciwnym przypadku.

Uogólnione zagadnienie przydziału

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \text{ dla } i \in I \tag{5}$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_{ij} \leqslant d_j \text{ dla } j \in J \tag{6}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in I, j \in J. \tag{7}$$

$x_{ij} = 1$ jeżeli przydzielamy obiekt i do pudelka j; $x_{ij} = 0$ w przeciwnym przypadku.

Możliwe są dwie relaksacje:

- Dodajemy do funkcji celu ograniczenie (5).
- Dodajemy do funkcji celu ograniczenie (6).

Uogólnione zagadnienie przydziału

Dodajemy do funkcji celu ograniczenie (5)

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(c_{ij} + \mu_i)x_{ij} - \sum_{i\in I}\mu_i$$

$$\sum_{i\in I} a_{ij}x_{ij} \leqslant d_j \text{ dla } j \in J$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i \in I, j \in J.$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_{|I|})$$

Uogólnione zagadnienie przydziału

Dodajemy do funkcji celu ograniczenie (5)

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (c_{ij} + \mu_i) x_{ij} - \sum_{i \in I} \mu_i$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_{ij} \leqslant d_j \text{ dla } j \in J$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in I, j \in J.$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_{|I|})$$

Rozwiązanie powyższego zadania dla ustalonego $\boldsymbol{\mu}$ sprowadza się do rozwiązania $|J|$ niezależnych zagadnień plecakowych.

Uogólnione zagadnienie przydziału

Dodajemy do funkcji celu ograniczenie (6)

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\mu}) = \min \sum_{i \in J} \sum_{j \in I} (c_{ij} + \mu_j a_{ij}) x_{ij} - \sum_{i \in J} \mu_j d_j \\
\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \text{ dla } i \in I \\
x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in I, j \in J. \\
\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_{|J|})
\end{aligned}
$$

Uogólnione zagadnienie przydziału

Dodajemy do funkcji celu ograniczenie (6)

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min \sum_{i \in J} \sum_{j \in I} (c_{ij} + \mu_j a_{ij}) x_{ij} - \sum_{i \in J} \mu_j d_j$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \text{ dla } i \in I$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in I, j \in J.$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_{|J|})$$

Co sprowadza się do rozwiązanie, dla ustalonego $\boldsymbol{\mu} \geqslant \mathbf{0}$, $|I|$ niezależnych łatwych problemów, $i \in I$,

$$\min \sum_{i \in J} ((c_{ij} + \mu_j a_{ij}) x_{ij}$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1$$

Problem lokalizacji (Facility location problem)

- I zbiór odbiorców (klientów),

Problem lokalizacji (Facility location problem)

- I zbiór odbiorców (klientów),
- J zbiór potencjalnych lokalizacji dostawców (np. hurtowni), z których zaopatruje się odbiorców,

Problem lokalizacji (Facility location problem)

- I zbiór odbiorców (klientów),
- J zbiór potencjalnych lokalizacji dostawców (np. hurtowni), z których zaopatruje się odbiorców,
- $y_j = 1$ jeżeli lokalizacja dostawcy jest w miejscu j, 0 w przeciwnym przypadku,

Problem lokalizacji (Facility location problem)

- I zbiór odbiorców (klientów),
- J zbiór potencjalnych lokalizacji dostawców (np. hurtowni), z których zaopatruje się odbiorców,
- $y_j = 1$ jeżeli lokalizacja dostawcy jest w miejscu j, 0 w przeciwnym przypadku,
- wartość zmiennej $0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1$ oznacza ułamek (procent) zapotrzebowania odbiorcy i pokrywany przez dostawcę w miejscu j,

Problem lokalizacji (Facility location problem)

- I zbiór odbiorców (klientów),
- J zbiór potencjalnych lokalizacji dostawców (np. hurtowni), z których zaopatruje się odbiorców,
- $y_j = 1$ jeżeli lokalizacja dostawcy jest w miejscu j, 0 w przeciwnym przypadku,
- wartość zmiennej $0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1$ oznacza ułamek (procent) zapotrzebowania odbiorcy i pokrywany przez dostawcę w miejscu j,
- d_i jest zapotrzebowaniem odbiorcy i,

Problem lokalizacji (Facility location problem)

- I zbiór odbiorców (klientów),
- J zbiór potencjalnych lokalizacji dostawców (np. hurtowni), z których zaopatruje się odbiorców,
- $y_j = 1$ jeżeli lokalizacja dostawcy jest w miejscu j, 0 w przeciwnym przypadku,
- wartość zmiennej $0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1$ oznacza ułamek (procent) zapotrzebowania odbiorcy i pokrywany przez dostawcę w miejscu j,
- d_i jest zapotrzebowaniem odbiorcy i,
- c_{ij} są kosztami transportu między dostawcą zlokalizowanym w j, a odbiorca i,

Problem lokalizacji (Facility location problem)

- I zbiór odbiorców (klientów),
- J zbiór potencjalnych lokalizacji dostawców (np. hurtowni), z których zaopatruje się odbiorców,
- $y_j = 1$ jeżeli lokalizacja dostawcy jest w miejscu j, 0 w przeciwnym przypadku,
- wartość zmiennej $0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1$ oznacza ułamek (procent) zapotrzebowania odbiorcy i pokrywany przez dostawcę w miejscu j,
- d_i jest zapotrzebowaniem odbiorcy i,
- c_{ij} są kosztami transportu między dostawcą zlokalizowanym w j, a odbiorca i,
- F_j jest stałym kosztem lokalizacji dostawcy (np. kosztem otwarcia, wynajęcia) w miejscu j,

Problem lokalizacji (Facility location problem)

- I zbiór odbiorców (klientów),
- J zbiór potencjalnych lokalizacji dostawców (np. hurtowni), z których zaopatruje się odbiorców,
- $y_j = 1$ jeżeli lokalizacja dostawcy jest w miejscu j, 0 w przeciwnym przypadku,
- wartość zmiennej $0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1$ oznacza ułamek (procent) zapotrzebowania odbiorcy i pokrywany przez dostawcę w miejscu j,
- d_i jest zapotrzebowaniem odbiorcy i,
- c_{ij} są kosztami transportu między dostawcą zlokalizowanym w j, a odbiorca i,
- F_j jest stałym kosztem lokalizacji dostawcy (np. kosztem otwarcia, wynajęcia) w miejscu j,
- K_j jest podażą dostawcy w miejscu j.

Problem lokalizacji

Model dla problemu jest następujący

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} F_j y_j$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \text{ dla } i \in I \tag{8}$$

$$\sum_{i \in I} d_i x_{ij} \leqslant K_j y_j \text{ dla } j \in J \tag{9}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1 \text{ dla } i \in I \text{ dla } j \in J \tag{10}$$

$$y_j \in \{0, 1\} \text{ dla } j \in J \tag{11}$$

Problem lokalizacji

Dodajemy do funkcji celu ograniczenie (8)

$$L(\mu) = \min \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(c_{ij} + \mu_i)x_{ij} + \sum_{j\in J} F_j y_j - \sum_{i\in I}\mu_i$$

$$\sum_{i\in I} d_i x_{ij} \leqslant K_j y_j \text{ dla } j \in J$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1 \text{ dla } i \in I \text{ dla } j \in J$$

$$y_j \in \{0,1\} \text{ dla } j \in J$$

Problem lokalizacji

Dodajemy do funkcji celu ograniczenie (8)

$$L(\mu) = \min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (c_{ij} + \mu_i) x_{ij} + \sum_{j \in J} F_j y_j - \sum_{i \in I} \mu_i$$

$$\sum_{i \in I} d_i x_{ij} \leqslant K_j y_j \text{ dla } j \in J$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1 \text{ dla } i \in I \text{ dla } j \in J$$

$$y_j \in \{0, 1\} \text{ dla } j \in J$$

Co sprowadza się do rozwiązanie, dla ustalonego μ, $|J|$ niezależnych podproblemów (składający się z dwóch podproblemów **LP**), $j \in J$,

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (c_{ij} + \mu_i) x_{ij} + \sum_{j \in J} F_j y_j$$

$$\sum_{i \in I} d_i x_{ij} \leqslant K_j y_j$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1 \text{ dla } i \in I$$

Problem lokalizacji

Dodajemy do funkcji celu ograniczenie (9)

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(c_{ij} + d_i\mu_j)x_{ij} + \sum_{j\in J}(F_j - \mu_j K_j)y_j$$

$$\sum_{j\in J} x_{ij} = 1 \text{ dla } i \in I$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1 \text{ dla } i \in I \text{ dla } j \in J$$

$$y_j \in \{0, 1\} \text{ dla } j \in J$$

Problem lokalizacji

Dodajemy do funkcji celu ograniczenie (9)

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (c_{ij} + d_i \mu_j) x_{ij} + \sum_{j \in J} (F_j - \mu_j K_j) y_j$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \text{ dla } i \in I$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1 \text{ dla } i \in I \text{ dla } j \in J$$

$$y_j \in \{0, 1\} \text{ dla } j \in J$$

Rozwiązujemy problem dla ustalonego $\boldsymbol{\mu} \geqslant \mathbf{0}$. $y_j = 1$ jeżeli $F_j - \mu_j K_j \leqslant 0$; 0 w przeciwnym przypadku.

Problem lokalizacji

Dodajemy do funkcji celu ograniczenie (9)

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (c_{ij} + d_i \mu_j) x_{ij} + \sum_{j \in J} (F_j - \mu_j K_j) y_j$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \text{ dla } i \in I$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1 \text{ dla } i \in I \text{ dla } j \in J$$

$$y_j \in \{0, 1\} \text{ dla } j \in J$$

Rozwiązujemy problem dla ustalonego $\boldsymbol{\mu} \geqslant \mathbf{0}$. $y_j = 1$ jeżeli $F_j - \mu_j K_j \leqslant 0$; 0 w przeciwnym przypadku. Po ustaleniu y_j, dla każdego $i \in I$ rozwiązujemy następujący łatwy problem (dla $j \in J$ ustalamy $x_{ij} = 1$)

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (c_{ij} + d_i \mu_j) x_{ij}$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1, \qquad 0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1 \text{ dla } j \in J$$

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książki:

Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, James B. Orlin.
Network Flows: theory, algorithms, and applications.
Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.