Metody optymalizacji
Wykład nr 13

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska

Problem mnożników Lagrange'a

$$z^* = \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$$

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$
$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$$

Problem mnożników Lagrange'a

$$
\begin{gathered}
z^* = \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
\mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b} \\
\mathbf{x} \in \mathbb{X}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
L(\boldsymbol{\mu}) = \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\
\mathbf{x} \in \mathbb{X}
\end{gathered}
$$

Problem mnożników Lagrange'a (najlepsze dolne ograniczenie)

$$
L^* = \max_{\boldsymbol{\mu} \geqslant \mathbf{0}} L(\boldsymbol{\mu}).
$$

Problem mnożników Lagrange'a

$$z^* = \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$$

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$
$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$$

Problem mnożników Lagrange'a (najlepsze dolne ograniczenie)

$$L^* = \max_{\boldsymbol{\mu} \geqslant \boldsymbol{0}} L(\boldsymbol{\mu}).$$

W przypadku $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ problem mnożników Lagrange'a ma postać

$$L^* = \max_{\boldsymbol{\mu}} L(\boldsymbol{\mu}).$$

Maksymalizujemy $\boldsymbol{\mu}$ minimalizując $\boldsymbol{x}$.

Problem najkrótszej ścieżki z ograniczeniem czasowym (Constrained Shortest Path) CSP

$$z^* = \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\textstyle\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{j\in P(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s, \\ -1 & i = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} \leqslant T$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A.$$

Relaksacja CSP

$$L(\mu) = \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + \mu\Big(\sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} - T\Big)$$

$$\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{j\in P(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s, \\ -1 & i = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A.$$

Relaksacja CSP

$$L(\mu) = \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + \mu\left(\sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} - T\right)$$

$$\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{j\in P(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s, \\ -1 & i = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A.$$

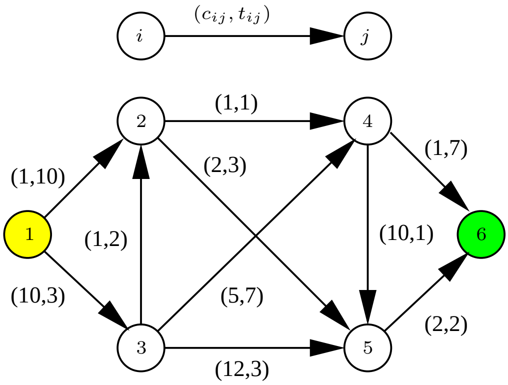
Inne sformułowanie (ścieżkowe)

$$L(\mu) = \min_{p\in\mathcal{P}_{st}} \sum_{(i,j)\in p} c_{ij} + \mu\left(\sum_{(i,j)\in p} t_{ij} - T\right) = \min_{p\in\mathcal{P}_{st}} c_p + \mu(t_p - T)$$

gdzie $\mathcal{P}_{st}$ jest zbiorem ścieżek od s do t.

Relaksacja CSP

Należy znaleźć najtańszą ścieżkę od wierzchołka 1 do 6, której czas przejazdu nie przekracza 14 ($T = 14$).

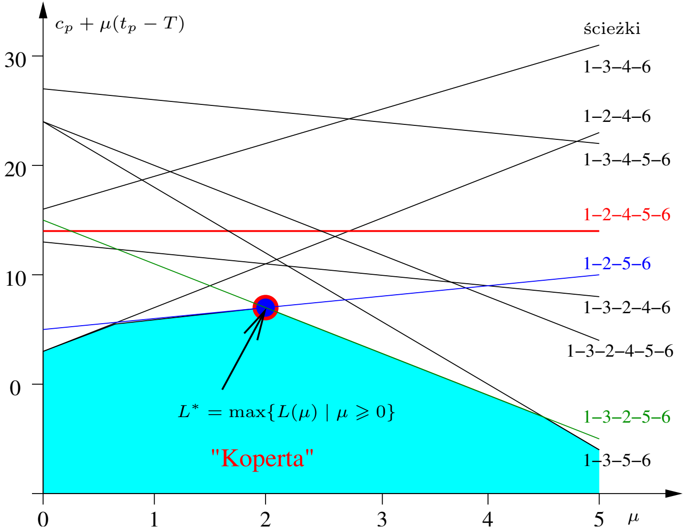


Problem mnożników Lagrange’a

Jaka jest natura problemu mnożników Lagrange’a?

ścieżka p	koszt c_p	czas t_p	$c_p + \mu(t_p - T)$
1-2-4-6	3	18	$3 + 4\mu$
1-2-5-6	5	15	$5 + \mu$
1-2-4-5-6	14	14	14
1-3-2-4-6	13	13	$13 - \mu$
1-3-2-5-6	15	10	$15 - 4\mu$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Problem mnożników Lagrange'a



Problem mnożników Lagrange'a

Rozważmy uogólnienie problemu

$$\min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$$

gdzie $\mathbb{X}$ jest zbiorem skończonym $\mathbb{X} = \{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^K\}$. Dokonując relaksacji Lagrange'a otrzymujemy

$$L(\mu) = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \mu^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$

Problem mnożników Lagrange'a

Z definicji

$$L(\mu) \leqslant \mathbf{c}^T \mathbf{x}^k + \mu^T(\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b}) \text{ dla } k = 1, \ldots K.$$

$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^k + \mu^T(\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b})$ jest hiperpłaszczyzną.

Problem mnożników Lagrange'a

Z definicji

$$L(\mu) \leqslant \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^k + \mu^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}) \text{ dla } k = 1, \dots K.$$

$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^k + \mu^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b})$ jest hiperpłaszczyzną.
Hiperpłaszczyzny $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^k + \mu^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b})$ dla $k = 1, \dots K$ tworzą "kopertę".

Problem mnożników Lagrange'a

Z definicji

$$L(\boldsymbol{\mu}) \leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}) \text{ dla } k = 1, \ldots K.$$

$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b})$ jest hiperpłaszczyzną.
Hiperpłaszczyzny $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b})$ dla $k = 1, \ldots K$ tworzą "kopertę". W problemie mnożników Lagrange'a chcemy wyznaczyć najwyższy punkt tej "koperty". Co sprowadza się do rozwiązania następującego problemu

$$\max w$$
$$w \leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}) \text{ dla } k = 1, \ldots K$$
$$\boldsymbol{\mu} \text{ dowolna.}$$

Rozwiązanie powyższego problemu sprowadza się do rozwiązania szeregu zadań **LP**.

Problem mnożników Lagrange'a

Metoda gradientów

Niech funkcja celu f będzie różniczkowalna i wklęsła. Gradient funkcji

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

o ile nie jest równy zero, wskazuje kierunek wzrostu wartości funkcji w pobliżu punktu, w którym jest wyliczony.

Problem mnożników Lagrange'a

Metoda gradientów

Niech funkcja celu f będzie różniczkowalna i wklęsła. Gradient funkcji

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

o ile nie jest równy zero, wskazuje kierunek wzrostu wartości funkcji w pobliżu punktu, w którym jest wyliczony. Jeżeli wybierzemy taki kierunek $\boldsymbol{d}$, że $\nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{d} > 0$, wówczas niewielkie przesunięcie o θ,

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}\theta$$

w tym kierunku spowoduje wzrost wartości funkcji

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}\theta) \geqslant f(\boldsymbol{x}).$$

Kierunek gradientu jest kierunkiem "w górę stoku".

Problem mnożników Lagrange'a

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$

- Startujemy z $\boldsymbol{\mu}^0$.
- dla $k := 0, 1, \ldots$
  Wyznaczamy $\boldsymbol{x}^k$ rozwiązując $L(\boldsymbol{\mu}^k)$

$$\boldsymbol{\mu}^{k+1} := \boldsymbol{\mu}^k + \theta^k (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}).$$

Problem z doborem θ^k - duże, małe!

Problem mnożników Lagrange'a

Załóżmy, że $\boldsymbol{x}^k$ rozwiązuje $L(\boldsymbol{\mu})$ dla $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^k$. Wówczas jest rozwiązaniem w otoczeniu $\boldsymbol{\mu}$. Aproksymujemy liniowo $L(\boldsymbol{\mu})$ za pomocą

$$r(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}).$$

Problem mnożników Lagrange'a

Załóżmy, że $\boldsymbol{x}^k$ rozwiązuje $L(\boldsymbol{\mu})$ dla $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^k$. Wówczas jest rozwiązaniem w otoczeniu $\boldsymbol{\mu}$. Aproksymujemy liniowo $L(\boldsymbol{\mu})$ za pomocą

$$r(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}).$$

Załóżmy, że znamy L^*, wówczas możemy tak wykonać ruch (dobrać θ^k), że osiągniemy L^*.

$$\begin{aligned}
r(\boldsymbol{\mu}^{k+1}) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{k+1}\,T}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}) = L^* \\
\boldsymbol{\mu}^{k+1} &= \boldsymbol{\mu}^k + \theta^k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}) \\
r(\boldsymbol{\mu}^{k+1}) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k + (\boldsymbol{\mu}^k + \theta^k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}))^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}) = L^*.
\end{aligned}$$

Problem mnożników Lagrange'a

Z równań wyznaczamy θ^k

$$\theta^k = \frac{L^* - L(\boldsymbol{\mu}^k)}{||\boldsymbol{Ax}^k - \boldsymbol{b}||^2}.$$

Ponieważ L^* nie jest znane, możemy użyć górnego ograniczenia UB na wartość funkcji celu z^*

$$\theta^k = \frac{\lambda_k(UB - L(\boldsymbol{\mu}^k))}{||\boldsymbol{Ax}^k - \boldsymbol{b}||^2},$$

gdzie $\lambda_k \in [0, 2]$.

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Twierdzenie 1

Jeżeli zastosujemy relaksację Lagrange'a do następującego zadania **LP**

$$
\begin{aligned}
&\min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
&\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
&\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q} \\
&\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

dokonując relaksacji ograniczeń $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wówczas optymalna wartość funkcji Lagrange'a L^* w problemie mnożników równa jest optymalnej wartości funkcji celu problemu (1).

Dowód.

(zob. koniec).

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

- Relaksacja Lagrange'a może być alternatywną sposobem rozwiązywania problemów **LP**.
- W niektórych przypadkach zastosowanie relaksacji Lagrange'a do **LP** może prowadzić do łatwiejszego rozwiązania problemu.
- Zastosowanie relaksacji może prowadzić do podziału problemu na mniejsze podproblemy (dekompozycje).

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Rozważmy problem optymalizacji dyskretnej.

$$\begin{aligned} z^* &= \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{Ax} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\in \mathbb{X} \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $\mathbb{X}$ jest zbiorem dyskretnym $\mathbb{X} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Dx} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ i całkowity$\}$, $\boldsymbol{D}$ jest macierzą, której elementy są całkowite, a $\boldsymbol{q}$ jest wektorem z całkowitymi elementami.

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Rozważmy problem optymalizacji dyskretnej.

$$\begin{aligned} z^* &= \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\in \mathbb{X} \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $\mathbb{X}$ jest zbiorem dyskretnym $\mathbb{X} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \text{ i całkowity}\}$, $\boldsymbol{D}$ jest macierzą, której elementy są całkowite, a $\boldsymbol{q}$ jest wektorem z całkowitymi elementami.

$$\begin{aligned} z^* &= \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} &\leqslant \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x} &\geqslant \boldsymbol{0} \text{ i całkowity} \end{aligned} \tag{3}$$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Niech

$$\begin{aligned} z^o &= \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{Ax} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Dx} &\leqslant \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x} &\geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

będzie liniową relaksacją problemu (3).

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Niech

$$\begin{aligned} z^o &= \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} &\leqslant \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x} &\geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

będzie liniową relaksacją problemu (3). Wiemy, że

$$z^o \leqslant z^*.$$

oraz

$$L^* \leqslant z^*.$$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Niech

$$\begin{aligned} z^o &= \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{D}\mathbf{x} &\leqslant \mathbf{q} \\ \mathbf{x} &\geqslant \mathbf{0} \end{aligned}$$

będzie liniową relaksacją problemu (3). Wiemy, że

$$z^o \leqslant z^*.$$

oraz

$$L^* \leqslant z^*.$$

Pokażemy, że wartość L^* jest najlepszym dolnym ograniczeniem na z^*, czyli

$$z^o \leqslant L^*.$$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Załóżmy, że zbiór $\mathbb{X} = \{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^K\}$ jest skończony.
Rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ jest wypukłą kombinacją rozwiązań $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^K$, jeżeli

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \boldsymbol{x}^k$$
$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1$$
$$\lambda_k \geqslant 0 \quad k = 1, \ldots, K.$$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Załóżmy, że zbiór $\mathbb{X} = \{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^K\}$ jest skończony.
Rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ jest wypukłą kombinacją rozwiązań $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^K$, jeżeli

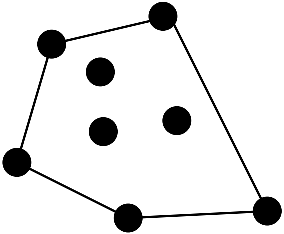
$$\begin{gathered} \boldsymbol{x} = \textstyle\sum_{k=1}^{K} \lambda_k \boldsymbol{x}^k \\ \textstyle\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1 \\ \lambda_k \geqslant 0 \quad k = 1, \ldots, K. \end{gathered}$$

$\mathcal{H}(\mathbb{X})$ jest otoczką wypukłą $\mathbb{X}$, jeżeli

$$\mathcal{H}(\mathbb{X}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \text{ jest wypukłą kombinacją punktów } \mathbb{X}\}.$$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Otoczka wypukła w $\mathbb{R}^2$



Otoczka wypukła $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ jest najmniejszym wielościanem wypukłym zawierającym wszystkie punkty zbioru $\mathbb{X}$.

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Własność 1

a) $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ jest wielościanem, który może być wyrażony za pomocą $\mathcal{H}(\mathbb{X}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d}\}$, gdzie $\boldsymbol{C}$ jest macierzą, a $\boldsymbol{d}$ jest wektorem.

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Własność 1

a) $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ jest wielościanem, który może być wyrażony za pomocą $\mathcal{H}(\mathbb{X}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d}\}$, gdzie $\boldsymbol{C}$ jest macierzą, a $\boldsymbol{d}$ jest wektorem.

b) Każdy punkt ekstremalny (wierzchołek) $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ należy do $\mathbb{X}$. Jeżeli rozwiązujemy zadanie $\min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X})\}$, to rozwiązanie optymalne należy do $\mathbb{X}$.

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Własność 1

a) $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ jest wielościanem, który może być wyrażony za pomocą $\mathcal{H}(\mathbb{X}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d}\}$, gdzie $\boldsymbol{C}$ jest macierzą, a $\boldsymbol{d}$ jest wektorem.

b) Każdy punkt ekstremalny (wierzchołek) $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ należy do $\mathbb{X}$. Jeżeli rozwiązujemy zadanie $\min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X})\}$, to rozwiązanie optymalne należy do $\mathbb{X}$.

c) Jeżeli $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$, to $\mathcal{H}(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{Y}$.

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Ad. a) Jest to znany fakt z algebry liniowej.

$\square$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Ad. a) Jest to znany fakt z algebry liniowej.
Ad. b) Pierwsza część wynika z faktu, że punkty należące do $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ a nie należące do $\mathbb{X}$ są wypukłą kombinacją z dodatnimi wagami co najmniej dwóch punktów z $\mathbb{X}$. Zatem nie są ekstremalne (nie są wierzchołkami $\mathbb{X}$). $\square$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Ad. a) Jest to znany fakt z algebry liniowej.
Ad. b) Pierwsza część wynika z faktu, że punkty należące do $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ a nie należące do $\mathbb{X}$ są wypukłą kombinacją z dodatnimi wagami co najmniej dwóch punktów z $\mathbb{X}$. Zatem nie są ekstremalne (nie są wierzchołkami $\mathbb{X}$). Druga część wynika z faktu, że optimum w zadaniach **LP** jest osiągane zawsze w co najmniej jednym punkcie ekstremalnym (wierzchołku).

$\square$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Ad. a) Jest to znany fakt z algebry liniowej.
Ad. b) Pierwsza część wynika z faktu, że punkty należące do $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ a nie należące do $\mathbb{X}$ są wypukłą kombinacją z dodatnimi wagami co najmniej dwóch punktów z $\mathbb{X}$. Zatem nie są ekstremalne (nie są wierzchołkami $\mathbb{X}$). Druga część wynika z faktu, że optimum w zadaniach **LP** jest osiągane zawsze w co najmniej jednym punkcie ekstremalnym (wierzchołku).
Ad. c) Ponieważ każdy element zbioru $\mathbb{X}$ należy do wypukłego zbioru $\mathbb{Y}$. Stąd każda wypukła kombinacja elementów zbioru $\mathbb{X}$ ($\mathcal{H}(\mathbb{X})$) również należy do $\mathbb{Y}$. $\square$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Twierdzenie 2

Optymalna wartość funkcji Lagrange'a L^* w problemie mnożników Langrange'a jest równa optymalnej wartości funkcji celu następującego zadania **LP**

$$\begin{aligned} z^* &= \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\in \mathcal{H}(\mathbb{X}) \end{aligned} \tag{4}$$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Rozważmy relaksację Lagrange'a problemu (2) dla pewnego μ.

$$L(\mu) = \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \mu^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$
$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{X},$$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Rozważmy relaksację Lagrange'a problemu (2) dla pewnego $\boldsymbol{\mu}$.

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$
$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{X},$$

która równoważna jest (własność 1 b) następującemu zadaniu (może ono być wyrażone jako **LP** – własność 1 a)

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \qquad (5)$$
$$\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X})$$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Rozważmy relaksację Lagrange'a problemu (2) dla pewnego $\boldsymbol{\mu}$.

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$
$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{X},$$

która równoważna jest (własność 1 b) następującemu zadaniu (może ono być wyrażone jako **LP** – własność 1 a)

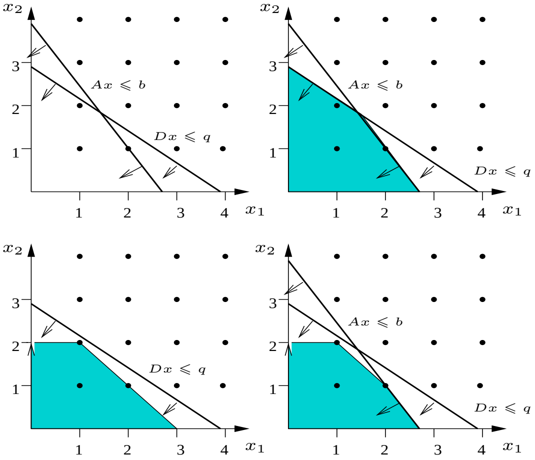
$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \qquad (5)$$
$$\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X})$$

Problem (5) jest relaksacją Lagrange'a (relaksacja ograniczeń $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) problemu (4). Zatem z twierdzenia 1 optymalna wartość L^* problemu mnożników jest równa optymalnej wartości z^* problemu (4).

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

$\{x \mid \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Dx} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \text{ i całkowity}\}$

$\{x \mid \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Dx} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$



Otoczka wypukła $\mathcal{H}(\mathbb{X})$

$\{x \mid \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X})\}$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Twierdzenie 3

Jeżeli zastosujemy relaksację Lagrange'a, i rozwiążemy problem mnożników, dla problemu

$$\begin{aligned} \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \text{ i całkowity.} \end{aligned}$$

Wówczas $z^o \leqslant L^*$, gdzie

$$\begin{aligned} z^o = \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Z twierdzenia 2 mamy

$$
\begin{aligned}
L^* &= \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\in \mathcal{H}(\mathbb{X}).
\end{aligned}
$$

$\square$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Z twierdzenia 2 mamy

$$\begin{aligned} L^* &= \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{Ax} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\in \mathcal{H}(\mathbb{X}). \end{aligned}$$

Z własności 1 c dostajemy

$$\mathcal{H}(\mathbb{X}) = \mathcal{H}(\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Dx} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \text{ i całkowity}\}) \subseteq \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Dx} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}.$$

Zatem $z^o \leqslant L^*$. $\square$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Kiedy $z^o = L^*$?

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Kiedy $z^o = L^*$?

Niech $\mathbb{X} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ i całkowity$\}$.

Definicja

*$\mathbb{X}$ ma własność całkowitoliczbowości jeżeli następujące zadanie **LP** ma rozwiązania całkowitoliczbowe dla każdego $\boldsymbol{d}$*

$$\begin{aligned} \min \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

$\mathbb{X}$ ma własność całkowitoliczbowości, jeśli np. $\boldsymbol{D}$ jest całkowicie unimodularna i $\boldsymbol{q}$ jest całkowity.

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Fakt 1

Jeżeli $\mathbb{X}$ ma własność całkowitoliczbowości, to

$$\min\{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\} = \min\{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}\} = \min\{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X})\}.$$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Twierdzenie 4

Jeżeli podproblem Lagrange'a po relaksacji problemu

$$\begin{aligned} \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Dx} \leqslant \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \text{ i całkowity.} \end{aligned}$$

ma własność całkowitoliczbowości, to $L^* = z^o$, gdzie

$$\begin{aligned} z^o = \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Dx} \leqslant \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Dowód.

Z faktu 1.

Dowód twierdzenia 1

Skorzystamy z dualności zadań **LP**. Załóżmy, że $\boldsymbol{x}^*$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu

$$\begin{aligned} \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{6}$$

a (π^*, γ^*) jest rozwiązaniem optymalnym odpowiadającego zadania dualnego.

Dowód twierdzenia 1

Skorzystamy z dualności zadań **LP**. Załóżmy, że $\boldsymbol{x}^*$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu

$$\begin{aligned} \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{6}$$

a (π^*, γ^*) jest rozwiązaniem optymalnym odpowiadającego zadania dualnego. Muszą więc spełniać warunki dopuszczalności i warunki komplementarności (twierdzenie o różnicach dopełniających):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{c}^T + {\pi^*}^T \boldsymbol{A} + {\gamma^*}^T \boldsymbol{D} \geqslant \boldsymbol{0} \\ &(\boldsymbol{c}^T + {\pi^*}^T \boldsymbol{A} + {\gamma^*}^T \boldsymbol{D})\boldsymbol{x}^* = 0 \\ &{\pi^*}^T (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - b) = 0 \\ &{\gamma^*}^T (\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^* - q) = 0 \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia 1...

Niech $L(\boldsymbol{\mu}) = \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$ będzie relaksacją problemu (6).

Dowód twierdzenia 1...

Niech $L(\boldsymbol{\mu}) = \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$ będzie relaksacją problemu (6).
Przyjmijmy za $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\pi}^*$. Zatem
$L(\boldsymbol{\pi}^*) = \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + {\boldsymbol{\pi}^*}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$.

Dowód twierdzenia 1...

Niech $L(\boldsymbol{\mu}) = \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$ będzie relaksacją problemu (6).
Przyjmijmy za $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\pi}^*$. Zatem
$L(\boldsymbol{\pi}^*) = \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$.
Rozwiązanie $\boldsymbol{x}^*$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla tego problemu, ponieważ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla (6).

Dowód twierdzenia 1...

Niech $L(\boldsymbol{\mu}) = \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$ będzie relaksacją problemu (6).
Przyjmijmy za $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\pi}^*$. Zatem
$L(\boldsymbol{\pi}^*) = \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$.
Rozwiązanie $\boldsymbol{x}^*$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla tego problemu, ponieważ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla (6).
Po przyjęciu $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\pi}^*$ warunki komplementarności dla problemu Lagrange'a są takie same jak warunki powyżej.

Dowód twierdzenia 1...

Niech $L(\boldsymbol{\mu}) = \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$ będzie relaksacją problemu (6).
Przyjmijmy za $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\pi}^*$. Zatem
$L(\boldsymbol{\pi}^*) = \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$.
Rozwiązanie $\boldsymbol{x}^*$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla tego problemu, ponieważ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla (6).
Po przyjęciu $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\pi}^*$ warunki komplementarności dla problemu Lagrange'a są takie same jak warunki powyżej.
Zatem $\boldsymbol{x}^*$ rozwiązuje problem Lagrange'a dla $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\pi}^*$. Ponieważ $\boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - b) = 0$, $L(\boldsymbol{\pi}^*) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$. Stąd $L^* = L(\boldsymbol{\pi}^*) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$. $\square$

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książki:

Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, James B. Orlin.
Network Flows: theory, algorithms, and applications.
Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.