1 Problem mnożników Lagrange'a

$$\begin{aligned} z^* = \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{X} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\mu}) = \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{X} \end{aligned}$$

Problem mnożników Lagrange'a (najlepsze dolne ograniczenie)

$$L^* = \max_{\boldsymbol{\mu} \geqslant \boldsymbol{0}} L(\boldsymbol{\mu}).$$

W przypadku $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ **problem mnożników Lagrange'a** ma postać

$$L^* = \max_{\boldsymbol{\mu}} L(\boldsymbol{\mu}).$$

Maksymalizujemy $\boldsymbol{\mu}$ minimalizując $\boldsymbol{x}$.

Problem najkrótszej ścieżki z ograniczeniem czasowym (Constrained Shortest Path) CSP

$$\begin{aligned} z^* = \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\ \textstyle\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{j\in P(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s, \\ -1 & i = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases} \\ \sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} \leqslant T \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A. \end{aligned}$$

Relaksacja CSP

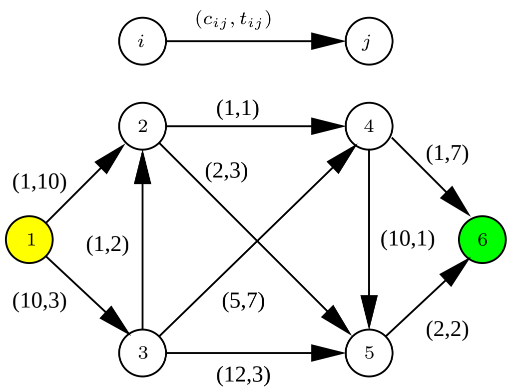
$$\begin{aligned} L(\mu) = \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + \mu(\sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} - T) \\ \textstyle\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{j\in P(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s, \\ -1 & i = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A. \end{aligned}$$

Inne sformułowanie (ścieżkowe)

$$L(\mu) = \min_{p\in\mathcal{P}_{st}} \sum_{(i,j)\in p} c_{ij} + \mu(\sum_{(i,j)\in p} t_{ij} - T) = \min_{p\in\mathcal{P}_{st}} c_p + \mu(t_p - T)$$

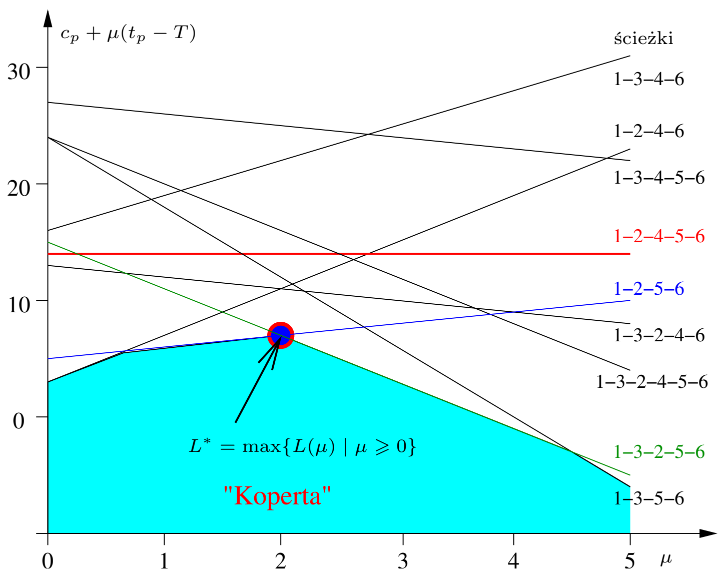
gdzie $\mathcal{P}_{st}$ jest zbiorem ścieżek od s do t.

Należy znaleźć najtańszą ścieżkę od wierzchołka 1 do 6, której czas przejazdu nie przekracza 14 ($T = 14$).



Jaka jest natura problemu mnożników Lagrange'a?

ścieżka p	koszt c_p	czas t_p	$c_p + \mu(t_p - T)$
1-2-4-6	3	18	$3 + 4\mu$
1-2-5-6	5	15	$5 + \mu$
1-2-4-5-6	14	14	14
1-3-2-4-6	13	13	$13 - \mu$
1-3-2-5-6	15	10	$15 - 4\mu$
⋮	⋮	⋮	⋮



Rozważmy uogólnienie problemu

$$\begin{gathered}\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{X}\end{gathered}$$

gdzie $\mathbb{X}$ jest zbiorem skończonym $\mathbb{X}=\{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\ldots,\boldsymbol{x}^K\}$. Dokonując relaksacji Lagrange'a otrzymujemy

$$L(\boldsymbol{\mu})=\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})$$

Z definicji

$$L(\boldsymbol{\mu})\leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{b}) \text{ dla } k=1,\ldots K.$$

$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{b})$ jest hiperpłaszczyzną.
Hiperpłaszczyzny $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{b})$ dla $k=1,\ldots K$ tworzą "kopertę".
W problemie mnożników Lagrange'a chcemy wyznaczyć najwyższy punkt tej "koperty". Co sprowadza się do rozwiązania następującego problemu

$$\begin{gathered}\max w\\ w\leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{b}) \text{ dla } k=1,\ldots K\\ \boldsymbol{\mu} \text{ dowolna.}\end{gathered}$$

Rozwiązanie powyższego problemu sprowadza się do rozwiązania szeregu zadań **LP**.

Metoda gradientów

Niech funkcja celu f będzie różniczkowalna i wklęsła. Gradient funkcji

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

o ile nie jest równy zero, wskazuje kierunek wzrostu wartości funkcji w pobliżu punktu, w którym jest wyliczony. Jeżeli wybierzemy taki kierunek $\boldsymbol{d}$, że $\nabla f(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{d}>0$, wówczas niewielkie przesunięcie o θ,

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}\theta$$

w tym kierunku spowoduje wzrost wartości funkcji

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}\theta)\geqslant f(\boldsymbol{x}).$$

Kierunek gradientu jest kierunkiem "w górę stoku".

$$L(\boldsymbol{\mu})=\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})$$

- Startujemy z $\boldsymbol{\mu}^0$.
- dla $k:=0,1,\ldots$

  Wyznaczamy $\boldsymbol{x}^k$ rozwiązując $L(\boldsymbol{\mu}^k)$

  $$\boldsymbol{\mu}^{k+1}:=\boldsymbol{\mu}^k+\theta^k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{b}).$$

Problem z doborem θ^k - duże, małe

Załóżmy, że $\boldsymbol{x}^k$ rozwiązuje $L(\boldsymbol{\mu})$ dla $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^k$. Wówczas jest rozwiązaniem w otoczeniu $\boldsymbol{\mu}$. Aproksymujemy liniowo $L(\boldsymbol{\mu})$ za pomocą

$$r(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}).$$

Załóżmy, że znamy L^*, wówczas możemy tak wykonać ruch (dobrać θ^k), że osiągniemy L^*.

$$\begin{aligned} r(\boldsymbol{\mu}^{k+1}) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{k+1}T}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}) = L^* \\ \boldsymbol{\mu}^{k+1} &= \boldsymbol{\mu}^k + \theta^k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}) \\ r(\boldsymbol{\mu}^{k+1}) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k + (\boldsymbol{\mu}^k + \theta^k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}))^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}) = L^*. \end{aligned}$$

Z równań wyznaczamy θ^k

$$\theta^k = \frac{L^* - L(\boldsymbol{\mu}^k)}{||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}||^2}.$$

Ponieważ L^* nie jest znane, możemy użyć górnego ograniczenia UB na wartość funkcji celu z^*

$$\theta^k = \frac{\lambda_k(UB - L(\boldsymbol{\mu}^k))}{||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}||^2},$$

gdzie $\lambda_k \in [0, 2]$.

2 Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Twierdzenie 1. *Jeżeli zastosujemy relaksację Lagrange'a do następującego zadania* **LP**

$$\begin{gathered} \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{gathered} \tag{1}$$

dokonując relaksacji ograniczeń $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wówczas optymalna wartość funkcji Lagrange'a L^* w problemie mnożników równa jest optymalnej wartości funkcji celu problemu (1).

Dowód. (zob. dodatek A). □

- Relaksacja Lagrange'a może być alternatywną sposobem rozwiązywania problemów **LP**.
- W niektórych przypadkach zastosowanie relaksacji Lagrange'a do **LP** może prowadzić do łatwiejszego rozwiązania problemu.

- Zastosowanie relaksacji może prowadzić do podziału problemu na mniejsze podproblemy (dekompozycje).

Rozważmy problem optymalizacji dyskretnej.

$$\begin{array}{c} z^* = \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{X} \end{array} \tag{2}$$

gdzie $\mathbb{X}$ jest zbiorem dyskretnym $\mathbb{X} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ i całkowity$\}$, $\boldsymbol{D}$ jest macierzą, której elementy są całkowite, a $\boldsymbol{q}$ jest wektorem z całkowitymi elementami.

$$\begin{array}{c} z^* = \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \text{ i całkowity} \end{array} \tag{3}$$

Niech

$$\begin{array}{c} z^o = \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{array}$$

będzie liniową relaksacją problemu (3). Wiemy, że

$$z^o \leqslant z^*.$$

oraz

$$L^* \leqslant z^*.$$

Pokażemy, że wartość L^* jest najlepszym dolnym ograniczeniem na z^*, czyli

$$\mathbf{z^o \leqslant L^*}.$$

Załóżmy, że zbiór $\mathbb{X} = \{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^K\}$ jest skończony.

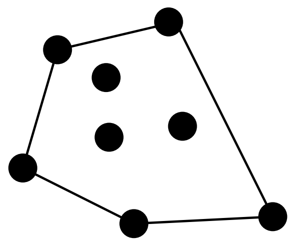
Rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ jest wypukłą kombinacją rozwiązań $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^K$, jeżeli

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^K \lambda_k \boldsymbol{x}^k \\ \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1 \\ \lambda_k \geqslant 0 \ \ k = 1, \ldots, K. \end{array}$$

$\mathcal{H}(\mathbb{X})$ jest otoczką wypukłą $\mathbb{X}$, jeżeli

$$\mathcal{H}(\mathbb{X}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \text{ jest wypukłą kombinacją punktów } \mathbb{X}\}.$$

Otoczka wypukła w $\mathbb{R}^2$



Otoczka wypukła $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ jest najmniejszym wielościanem wypukłym zawierającym wszystkie punkty zbioru $\mathbb{X}$.

Własność 1.

a) *$\mathcal{H}(\mathbb{X})$ jest wielościanem, który może być wyrażony za pomocą $\mathcal{H}(\mathbb{X}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d}\}$, gdzie $\boldsymbol{C}$ jest macierzą, a $\boldsymbol{d}$ jest wektorem.*

b) *Każdy punkt ekstremalny (wierzchołek) $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ należy do $\mathbb{X}$. Jeżeli rozwiązujemy zadanie $\min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X})\}$, to rozwiązanie optymalne należy do $\mathbb{X}$.*

c) *Jeżeli $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$, to $\mathcal{H}(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{Y}$.*

Dowód.
Ad. a) Jest to znany fakt z algebry liniowej.
Ad. b) Pierwsza część wynika z faktu, że punkty należące do $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ a nie należące do $\mathbb{X}$ są wypukłą kombinacją z dodatnimi wagami co najmniej dwóch punktów z $\mathbb{X}$. Zatem nie są ekstremalne (nie są wierzchołkami $\mathbb{X}$).

Druga część wynika z faktu, że optimum w zadaniach **LP** jest osiągane zawsze w co najmniej jednym punkcie ekstremalnym (wierzchołku).
Ad. c) Ponieważ każdy element zbioru $\mathbb{X}$ należy do wypukłego zbioru $\mathbb{Y}$. Stąd każda wypukła kombinacja elementów zbioru $\mathbb{X}$ ($\mathcal{H}(\mathbb{X})$) również należy do $\mathbb{Y}$. □

Twierdzenie 2. *Optymalna wartość funkcji Lagrange'a L^* w problemie mnożników Langrange'a jest równa optymalnej wartości funkcji celu następującego zadania* **LP**

$$\begin{aligned} z^* = \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X}) \end{aligned} \tag{4}$$

Dowód. Rozważmy relaksację Lagrange'a problemu (2) dla pewnego $\boldsymbol{\mu}$.

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\mu}) = \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}, \end{aligned}$$

która równoważna jest (własność 1 b) następującemu zadaniu (może ono być wyrażone jako **LP** – własność 1 a)

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X}) \tag{5}$$

Problem (5) jest relaksacją Lagrange'a (relaksacja ograniczeń $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) problemu (4). Zatem z twierdzenia 1 optymalna wartość L^* problemu mnożników jest równa optymalnej wartości z^* problemu (4). □

Twierdzenie 3. *Jeżeli zastosujemy relaksację Lagrange'a, i rozwiążemy problem mnożników, dla problemu*

$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q} \\ &\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \text{ i całkowity.} \end{aligned}$$

Wówczas $z^o \leqslant L^*$, *gdzie*

$$\begin{aligned} z^o = &\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q} \\ &\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Dowód. Z twierdzenia 2 mamy

$$\begin{aligned} L^* = &\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X}). \end{aligned}$$

Z własności 1 c dostajemy

$$\mathcal{H}(\mathbb{X}) = \mathcal{H}(\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \text{ i całkowity}\}) \subseteq \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}.$$

Zatem $z^o \leqslant L^*$. Powyższe rozumowanie ilustruje rysunek 1. □

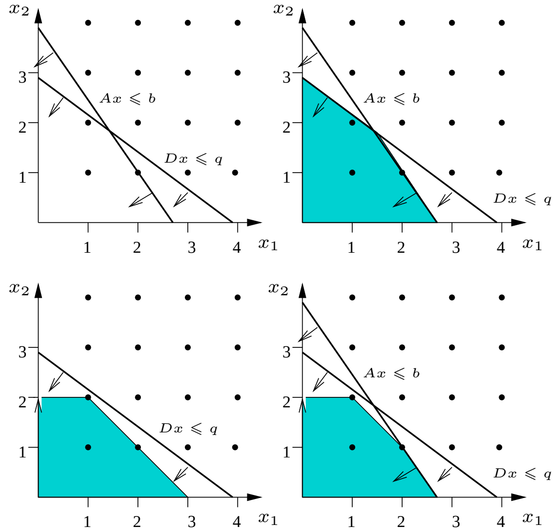
Kiedy $z^o = L^*$?

Niech $\mathbb{X} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \text{ i całkowity}\}$.

Definicja 1. $\mathbb{X}$ *ma* **własność całkowitoliczbowości** *jeżeli następujące zadanie* **LP** *ma rozwiązania całkowitoliczbowe dla każdego* $\boldsymbol{d}$

$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \\ &\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q} \\ &\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

$\{x \mid \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Dx} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \text{ i całkowity}\}$ $\{x \mid \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Dx} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$



Otoczka wypukła $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ $\{x \mid \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X})\}$

Rysunek 1: Ilustracja dowodu twierdzenia 3.

$\mathbb{X}$ ma **własność całkowitoliczbowości**, jeśli np. $\boldsymbol{D}$ jest całkowicie unimodularna i $\boldsymbol{q}$ jest całkowity.

Fakt 1. *Jeżeli $\mathbb{X}$ ma własność całkowitoliczbowości, to*

$$\begin{aligned} \min\{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Dx} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\} &= \min\{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}\} \\ &= \min\{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X})\}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 4. *Jeżeli podproblem Lagrange'a po relaksacji problemu*

$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{Dx} \leqslant \boldsymbol{q} \\ &\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \text{ i całkowity.} \end{aligned}$$

ma własność całkowitoliczbowości, to $L^* = z^o$, gdzie

$$\begin{aligned} z^o = &\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{Dx} \leqslant \boldsymbol{q} \\ &\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Dowód. Z faktu 1. □

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książki [1].

Literatura

[1] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, James B. Orlin. *Network Flows: theory, algorithms, and applications.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

A Dodatek

Dowód twierdzenia 1. Skorzystamy z dualności zadań **LP**. Załóżmy, że $\boldsymbol{x}^*$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu

$$\begin{aligned} \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{6}$$

a $(\boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\gamma}^*)$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiadającego zadania dualnego. Muszą więc spełniać warunki dopuszczalności i warunki komplementarności (twierdzenie o różnicach dopełniających):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{c}^T + \boldsymbol{\pi}^{*T}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\gamma}^{*T}\boldsymbol{D} \geqslant \boldsymbol{0} \\ &(\boldsymbol{c}^T + \boldsymbol{\pi}^{*T}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\gamma}^{*T}\boldsymbol{D})\boldsymbol{x}^* = 0 \\ &\boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - b) = 0 \\ &\boldsymbol{\gamma}^{*T}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^* - q) = 0 \end{aligned}$$

Niech $L(\boldsymbol{\mu}) = \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$ będzie relaksacją problemu (6). Przyjmijmy za $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\pi}^*$. Zatem $L(\boldsymbol{\pi}^*) = \min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$. Rozwiązanie $\boldsymbol{x}^*$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla tego problemu, ponieważ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla (6). Po przyjęciu $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\pi}^*$ warunki komplementarności dla problemu Lagrange'a są takie same jak warunki powyżej. Zatem $\boldsymbol{x}^*$ rozwiązuje problem Lagrange'a dla $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\pi}^*$. Ponieważ $\boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - b) = 0$, $L(\boldsymbol{\pi}^*) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$. Stąd $L^* = L(\boldsymbol{\pi}^*) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$. □