Metody optymalizacji
Wykład nr 2

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska

Problem programowania liniowego – postać ogólna

$$\min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \sum_{j \in [n]} c_j x_j \tag{1}$$

$$\text{przy warunkach} \quad \sum_{j \in [n]} a_{ij} x_j = b_i \qquad i \in M_= \tag{2}$$

$$\sum_{j \in [n]} a_{ij} x_j \leqslant b_i \qquad i \in M_\leqslant \tag{3}$$

$$\sum_{j \in [n]} a_{ij} x_j \geqslant b_i \qquad i \in M_\geqslant \tag{4}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j \in N_\geqslant \tag{5}$$

$$x_j \leqslant 0 \qquad j \in N_\leqslant \tag{6}$$

$$x_j \in \mathbb{R} \qquad j \in N_\mathbb{R} \tag{7}$$

Problem programowania liniowego – postać ogólna...

Danymi (parametrami) dla (1)–(7) są:

- $m = |M_=| + |M_\leqslant| + |M_\geqslant|$, $n = |N_\geqslant| + |N_\leqslant| + |N_\mathbb{R}|$,
- macierz ograniczeń $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$,
- wektor prawych stron $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$,
- wektor współczynników funkcji celu $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.

Wektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem zmiennych decyzyjnych.

Problem programowania liniowego ...

Postać kanoniczna:

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{przy warunkach } & Ax \geqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Postać standardowa:

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{przy warunkach } & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Problem programowania liniowego ...

- Postacie programowania liniowego są sobie równoważne!
- Za pomocą prostych transformacji możemy przekształcić egzemplarz jednej postaci do egzemplarza drugiej postaci i te dwa egzemplarze mają te same rozwiązanie (te same rozwiązanie optymalne).

Transformacje

Postać ogólna $\rightarrow$ postać kanoniczna:

1. ograniczenia (3), "$\leqslant$", mnożymy obustronnie przez -1,
2. zmienne decyzyjne $x_j \leqslant 0$ zastępujemy następująco $x_j = -x_j^-$, gdzie $x_j^- \geqslant 0$, i ograniczenia (6), "$\leqslant$", mnożymy obustronnie przez -1,
3. zmienne decyzyjne $x_j \in \mathbb{R}$ zastępujemy różnicą dwóch nieujemnych zmiennych decyzyjnych, tzn. $x_j = x_j^+ - x_j^-$, gdzie $x_j^+ \geqslant 0$ i $x_j^- \geqslant 0$.

Transformacje...

Postać ogólna $\to$ postać standardowa:

1. zmienne decyzyjne $x_j \leqslant 0$ zastępujemy następująco $x_j = -x_j^-$, gdzie $x_j^- \geqslant 0$, i ograniczenia (6), "$\leqslant$", mnożymy obustronnie przez -1,
2. zmienne decyzyjne $x_j \in \mathbb{R}$ zastępujemy różnicą dwóch nieujemnych zmiennych decyzyjnych, tzn. $x_j = x_j^+ - x_j^-$, gdzie $x_j^+ \geqslant 0$ i $x_j^- \geqslant 0$,
3. ograniczenie (3), "$\leqslant$", sprowadzamy do ograniczenia równościowego przez wprowadzenie nieujemnej zmiennej dodatkowej (niedoboru),
$$\sum_{j\in[n]} a_{ij}x_j + s_i = b_i, \quad s_i \geqslant 0,$$
4. ograniczenie (4), "$\geqslant$", sprowadzamy do ograniczenia równościowego przez wprowadzenie nieujemnej zmiennej dodatkowej (nadmiaru),
$$\sum_{j\in[n]} a_{ij}x_j - s_i = b_i, \quad s_i \geqslant 0.$$

Transformacje...

max $\longrightarrow$ min:

$$\begin{array}{c} \max \ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \mathbb{X} = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{array} \right. \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \min \ -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \mathbb{X} = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{array} \right. \end{array}$$

Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks

O tego momentu będziemy rozpatrywali zagadnienie LP w postaci standardowej (z $\min$):

$$\min \; \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$
$$\mathbb{X} = \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $(m < n)$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ $(\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0})$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.

Założenie (o rzędzie)

$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = m.$

Rozwiązanie bazowe

Ograniczenia $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ możemy zapisać:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^B \\ \boldsymbol{x}^P \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

gdzie $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ i $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) = m$ (z założenia o rzędzie), $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $\boldsymbol{x}^B \in \mathbb{R}^m$ i $\boldsymbol{x}^P \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Definicja

Rozwiązanie $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$, *takie, że* $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ *i* $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$, *nazywamy rozwiązaniem bazowym układu* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ *a podmacierz* $\boldsymbol{B}$ *bazą. Jeśli dodatkowo* $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$, *to mówimy, że* $\boldsymbol{x}$ *jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym.*

Wierzchołek zbioru

Założenie (niesprzeczności)

$\mathbb{X} \neq \emptyset$.

Definicja

Niech $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym. Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{U}$ nazywamy wierzchołkiem zbioru wypukłego $\mathbb{U}$, jeśli nie istnieją dwa punkty $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{U}$ różne od $\boldsymbol{x}$ i $\lambda \in (0, 1)$, że $\boldsymbol{x}$ jest ich ścisłą wypukłą kombinacją, tj.

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{u} + (1 - \lambda)\boldsymbol{v}.$$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Twierdzenie

Rozwiązanie $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ jest wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$ wtedy i tylko wtedy $\boldsymbol{x}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ będzie wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$. Jeśli $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, wówczas z założenia o rzędzie natychmiast dostajemy, że $\boldsymbol{x}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ będzie wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$. Jeśli $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, wówczas z założenia o rzędzie natychmiast dostajemy, że $\boldsymbol{x}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
Załóżmy, że w $\boldsymbol{x}$ istnieje co najmniej jedna składowa dodatnia oraz $\boldsymbol{x}$ nie jest rozwiązaniem bazowym (dowód nie wprost).
Składowe można podzielić na $[\boldsymbol{x}^G, \boldsymbol{x}^P]^T$, gdzie $\boldsymbol{x}^G > \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{x}^P = \mathbf{0}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ będzie wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$. Jeśli $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, wówczas z założenia o rzędzie natychmiast dostajemy, że $\boldsymbol{x}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Załóżmy, że w $\boldsymbol{x}$ istnieje co najmniej jedna składowa dodatnia oraz $\boldsymbol{x}$ nie jest rozwiązaniem bazowym (dowód nie wprost).

Składowe można podzielić na $[\boldsymbol{x}^G, \boldsymbol{x}^P]^T$, gdzie $\boldsymbol{x}^G > \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$.

Ograniczenia $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ możemy zapisać:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{G} & \boldsymbol{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^G \\ \boldsymbol{x}^P \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \tag{8}$$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ będzie wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$. Jeśli $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, wówczas z założenia o rzędzie natychmiast dostajemy, że $\boldsymbol{x}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
Załóżmy, że w $\boldsymbol{x}$ istnieje co najmniej jedna składowa dodatnia oraz $\boldsymbol{x}$ nie jest rozwiązaniem bazowym (dowód nie wprost).
Składowe można podzielić na $[\boldsymbol{x}^G, \boldsymbol{x}^P]^T$, gdzie $\boldsymbol{x}^G > \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$.
Ograniczenia $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ możemy zapisać:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{G} & \boldsymbol{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^G \\ \boldsymbol{x}^P \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \tag{8}$$

Ponieważ $\boldsymbol{x}$ nie jest rozwiązaniem bazowym, macierz $\boldsymbol{G}$ ma liniowo zależne kolumny. Stąd istnieje wektor $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ taki, że $\boldsymbol{G}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

Ograniczenia (8) możemy zapisać:

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{G} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^{G} \pm \alpha \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{b} \text{ dla } \alpha \neq 0.$$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

Ograniczenia (8) możemy zapisać:

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} \pm \alpha \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{b} \text{ dla } \alpha \neq 0.$$

Z faktu, że $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} > \mathbf{0}$ wynika, że możemy tak dobrać $\alpha \neq 0$, aby $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} \pm \alpha \boldsymbol{w} > \mathbf{0}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

Ograniczenia (8) możemy zapisać:

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} \pm \alpha \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{b} \text{ dla } \alpha \neq 0.$$

Z faktu, że $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} > \mathbf{0}$ wynika, że możemy tak dobrać $\alpha \neq 0$, aby $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} \pm \alpha \boldsymbol{w} > \mathbf{0}$.
Stąd otrzymujemy dwa wektory:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ i } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

takie, że $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

Ograniczenia (8) możemy zapisać:

$$\boldsymbol{Gx^G} + \boldsymbol{Gw} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x^G} \pm \alpha \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{b} \text{ dla } \alpha \neq 0.$$

Z faktu, że $\boldsymbol{x^G} > \boldsymbol{0}$ wynika, że możemy tak dobrać $\alpha \neq 0$, aby $\boldsymbol{x^G} \pm \alpha \boldsymbol{w} > \boldsymbol{0}$.
Stąd otrzymujemy dwa wektory:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x^G} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \text{ i } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x^G} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

takie, że $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$.
Ponadto

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}.$$

Stąd $\lambda = 1/2$. Co przeczy, że $\boldsymbol{x}$ jest wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\boldsymbol{x}$ nie jest wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$ (dowód nie wprost).

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\boldsymbol{x}$ nie jest wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$ (dowód nie wprost). Stąd istnieją $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}$ różne od $\boldsymbol{x}$ i $\lambda \in (0, 1)$ takie, że

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{u} + (1 - \lambda)\boldsymbol{v}.$$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\boldsymbol{x}$ nie jest wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$ (dowód nie wprost). Stąd istnieją $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}$ różne od $\boldsymbol{x}$ i $\lambda \in (0,1)$ takie, że

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{u} + (1 - \lambda)\boldsymbol{v}.$$

Rozwiązanie $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, tj. $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{b}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\boldsymbol{x}$ nie jest wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$ (dowód nie wprost). Stąd istnieją $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}$ różne od $\boldsymbol{x}$ i $\lambda \in (0, 1)$ takie, że

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{u} + (1 - \lambda)\boldsymbol{v}.$$

Rozwiązanie $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, tj. $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{b}$.
Zapiszmy

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^B \\ \boldsymbol{u}^P \end{bmatrix} \text{ i } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}^B \\ \boldsymbol{v}^P \end{bmatrix}$$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\boldsymbol{x}$ nie jest wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$ (dowód nie wprost). Stąd istnieją $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}$ różne od $\boldsymbol{x}$ i $\lambda \in (0, 1)$ takie, że

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{u} + (1 - \lambda)\boldsymbol{v}.$$

Rozwiązanie $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, tj. $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{Bx}^B = \boldsymbol{b}$.
Zapiszmy

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^B \\ \boldsymbol{u}^P \end{bmatrix} \text{ i } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}^B \\ \boldsymbol{v}^P \end{bmatrix}$$

Ponieważ $\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{u} + (1 - \lambda)\boldsymbol{v}$. Zatem $\boldsymbol{x}^P = \lambda \boldsymbol{u}^P + (1 - \lambda)\boldsymbol{v}^P$. Z faktu, że $\lambda \in (0, 1)$ wynika, że $\boldsymbol{u}^P = \boldsymbol{v}^P = \boldsymbol{0}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}.$$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{B} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{B} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}^{B} = \boldsymbol{b}.$$

Wiemy, że $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) = m$

$$\boldsymbol{x}^{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}^{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}^{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Au} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Av} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{Bx}^{B} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Bu}^{B} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Bv}^{B} = \boldsymbol{b}.$$

Wiemy, że $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) = m$

$$\boldsymbol{x}^{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}^{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}^{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Zatem $\boldsymbol{x}^{B} = \boldsymbol{u}^{B} = \boldsymbol{v}^{B}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Au} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Av} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{Bx}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Bu}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Bv}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}.$$

Wiemy, że $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) = m$

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Zatem $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{B}}$.
Stąd i $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0}$ dostajemy $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ - sprzeczność.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Au} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Av} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{Bx^B} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Bu^B} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Bv^B} = \boldsymbol{b}.$$

Wiemy, że $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) = m$

$$\boldsymbol{x^B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u^B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v^B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Zatem $\boldsymbol{x^B} = \boldsymbol{u^B} = \boldsymbol{v^B}$.
Stąd i $\boldsymbol{x^P} = \boldsymbol{u^P} = \boldsymbol{v^P} = \boldsymbol{0}$ dostajemy $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ - sprzeczność. $\square$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

Fakt

Maksymalna liczba rozwiązań bazowych układu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *(*$m < n$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = m$*) wynosi* $\binom{n}{m}$.

Fakt

Liczba rozwiązań bazowych dopuszczalnych (wierzchołków) nie może przekroczyć $\binom{n}{m}$.

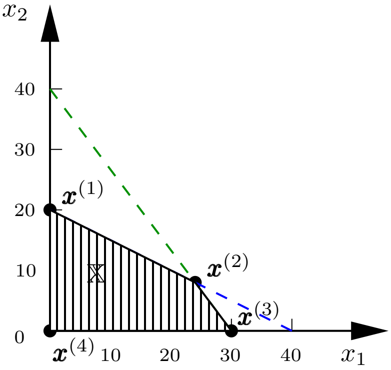
Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...

$$\mathbb{X} = \begin{cases} x_1 + \frac{3}{4}x_2 & \leqslant 30 \\ 2x_1 + 4x_2 & \leqslant 80 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \mathbb{X}' = \begin{cases} x_1 + \frac{3}{4}x_2 + x_3 & & = 30 \\ 2x_1 + 4x_2 & +x_4 & = 80 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

Fakt

Istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne takie, że każdemu wierzchołkowi w zbiorze $\mathbb{X}$ odpowiada wierzchołek w zbiorze $\mathbb{X}'$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe...



$$
\begin{array}{lcl}
x^{(1)} & = & [0,\; \mathbf{20},\; \mathbf{15},\; 0\;] \\
x^{(2)} & = & [\mathbf{24},\; \mathbf{8},\; 0,\; 0\;] \\
x^{(3)} & = & [\mathbf{30},\; 0\;,\; 0,\; \mathbf{20}\;] \\
x^{(4)} & = & [\;0,\; 0,\; \mathbf{30},\; \mathbf{80}\;] \\
x^{(5)} & = & [\mathbf{40},\; 0,\; \mathbf{-10},\; 0\;] \\
x^{(6)} & = & [0,\; \mathbf{40},\; 0,\; \mathbf{-80}\;]
\end{array}
$$

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książek

- Ireneusz Nykowski.
  Programowanie liniowe.
  PWE, Warszawa, 1980.
- Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz.
  Combinatorial optimization: algorithms and complexity.
  Dover Publications Inc., 1998.