Metody optymalizacji
Wykład nr 3

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Twierdzenie

Jeżeli założenia o rzędzie i o niesprzeczności są spełnione, to zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ ma co najmniej jeden wierzchołek (rozwiązanie bazowe dopuszczalne).

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Dowód.

Z założenia o niesprzeczności mamy, że $\mathbb{X} \neq \emptyset$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Dowód.

Z założenia o niesprzeczności mamy, że $\mathbb{X} \neq \emptyset$.
Wybierzmy $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Dowód.
Z założenia o niesprzeczności mamy, że $\mathbb{X} \neq \emptyset$.
Wybierzmy $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$.
Uporządkujmy składowe $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_t, 0, \ldots, 0], \quad x_j > 0 \;\; j \in [t].$$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Dowód.

Z założenia o niesprzeczności mamy, że $\mathbb{X} \neq \emptyset$.
Wybierzmy $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$.
Uporządkujmy składowe $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_t, 0, \dots, 0], \quad x_j > 0 \quad j \in [t].$$

Załóżmy, że $t > 0$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Dowód.

Z założenia o niesprzeczności mamy, że $\mathbb{X} \neq \emptyset$.
Wybierzmy $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$.
Uporządkujmy składowe $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_t, 0, \ldots, 0], \quad x_j > 0 \;\; j \in [t].$$

Załóżmy, że $t > 0$. W przeciwnym przypadku ($t = 0$) $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Ponieważ $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$ (założenie o rzędzie), wówczas $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym (zdegenerowanym).

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Kontynuując ($t > 0$) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ jest postaci

$$\boldsymbol{A}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{A}_t x_t = \boldsymbol{b},$$

gdzie $\boldsymbol{A}_j$ jest j-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Kontynuując ($t > 0$) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ jest postaci

$$\boldsymbol{A}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{A}_t x_t = \boldsymbol{b},$$

gdzie $\boldsymbol{A}_j$ jest j-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$.
Niech $r = \mathrm{rank}([\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_t])$. Oczywiście $r \leqslant \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ oraz $r > 0$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Kontynuując ($t > 0$) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ jest postaci

$$\boldsymbol{A}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{A}_t x_t = \boldsymbol{b},$$

gdzie $\boldsymbol{A}_j$ jest j-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$.
Niech $r = \operatorname{rank}([\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_t])$. Oczywiście $r \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$ oraz $r > 0$.
W przeciwnym przypadku ($r = 0$) znowu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, ponieważ $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = m$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Kontynuując ($t > 0$) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ jest postaci

$$\boldsymbol{A}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{A}_t x_t = \boldsymbol{b},$$

gdzie $\boldsymbol{A}_j$ jest j-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$.
Niech $r = \operatorname{rank}([\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_t])$. Oczywiście $r \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$ oraz $r > 0$.
W przeciwnym przypadku ($r = 0$) znowu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, ponieważ $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = m$.
Rozpatrzmy dwa przypadki.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Kontynuując ($t > 0$) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ jest postaci

$$\boldsymbol{A}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{A}_t x_t = \boldsymbol{b},$$

gdzie $\boldsymbol{A}_j$ jest j-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$.
Niech $r = \operatorname{rank}([\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_t])$. Oczywiście $r \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$ oraz $r > 0$.
W przeciwnym przypadku ($r = 0$) znowu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, ponieważ $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = m$.
Rozpatrzmy dwa przypadki.
Przypadek, $r = t \leqslant m$. Ponieważ $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = m$ z $n - t$ kolumn wybieramy $m - t$ kolumn, aby z t kolumnami tworzyły m kolumn liniowo niezależnych. Wtedy $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_t, 0, \ldots, 0]$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Kontynuując ($t > 0$) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ jest postaci

$$\boldsymbol{A}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{A}_t x_t = \boldsymbol{b},$$

gdzie $\boldsymbol{A}_j$ jest j-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$.
Niech $r = \mathrm{rank}([\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_t])$. Oczywiście $r \leqslant \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ oraz $r > 0$.
W przeciwnym przypadku ($r = 0$) znowu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, ponieważ $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$.
Rozpatrzmy dwa przypadki.
Przypadek, $r = t \leqslant m$. Ponieważ $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$ z $n - t$ kolumn wybieramy $m - t$ kolumn, aby z t kolumnami tworzyły m kolumn liniowo niezależnych. Wtedy $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_t, 0, \ldots, 0]$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym.
Ponadto, jeśli $t < m$ jest rozwiązaniem zdegenerowanym.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Przypadek $r < t$. Stąd podmacierz $\overline{\boldsymbol{A}}$ macierzy $\boldsymbol{A}$,

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix},$$

jest nieosobliwa. Istnieje, więc $\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Przypadek $r < t$. Stąd podmacierz $\overline{\boldsymbol{A}}$ macierzy $\boldsymbol{A}$,

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix},$$

jest nieosobliwa. Istnieje, więc $\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}$.
Stąd możemy wyrazić składowe $x_1, \ldots, x_r$ wektora $\boldsymbol{x}$ za pomocą jego składowych $x_{r+1}, \ldots, x_t$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Przypadek $r < t$. Stąd podmacierz $\overline{\boldsymbol{A}}$ macierzy $\boldsymbol{A}$,

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix},$$

jest nieosobliwa. Istnieje, więc $\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}$.

Stąd możemy wyrazić składowe $x_1, \ldots, x_r$ wektora $\boldsymbol{x}$ za pomocą jego składowych $x_{r+1}, \ldots, x_t$.

Układ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ można zapisać (pierwsze r ograniczeń):

$$\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\overline{\boldsymbol{A}}}\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{b}',$$

gdzie $\overline{\boldsymbol{x}} = [x_1, \ldots, x_r]$, $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} = [x_{r+1}, \ldots, x_t]$, $\boldsymbol{b}' \in \mathbb{R}^r$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{b}' - \overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}.$$

Podstawiając $\beta = \overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{b}'$ i $\alpha = -\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$. Składowe $\overline{\boldsymbol{x}}$ mają postać

$$x_j = \beta_j + \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij} x_i \quad j \in [r].$$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{b}' - \overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}.$$

Podstawiając $\boldsymbol{\beta} = \overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{b}'$ i $\boldsymbol{\alpha} = -\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$. Składowe $\overline{\boldsymbol{x}}$ mają postać

$$x_j = \beta_j + \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij} x_i \quad j \in [r].$$

Konstruujemy nowe rozwiązanie dopuszczalne $\hat{\boldsymbol{x}}$, które będzie miało o co najmniej jedną składową zerową więcej niż $\boldsymbol{x}$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta & \text{dla } j = r+1, \\ x_j & \text{dla } j > r+1, \\ \beta_j + \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij}\hat{x}_i & \text{dla } j < r+1, \end{cases}$$

gdzie $\theta \geqslant 0$, $\beta_j = x_j - \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij} x_i$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta & \text{dla } j = r+1, \\ x_j & \text{dla } j > r+1, \\ \beta_j + \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij}\hat{x}_i & \text{dla } j < r+1, \end{cases}$$

gdzie $\theta \geqslant 0$, $\beta_j = x_j - \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij} x_i$.
Przyjrzyjmy się składowym $\hat{x}_j$, $j \in [r]$,

$$\begin{aligned} \hat{x}_j =& \beta_j + \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij}\hat{x}_i = \beta_j + \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij} x_i - \theta\alpha_{r+1\,j} \\ =& x_j - \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij} x_i + \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij} x_i - \theta\alpha_{r+1\,j} = x_j - \theta\alpha_{r+1\,j}. \end{aligned}$$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta & \text{dla } j = r+1, \\ x_j & \text{dla } j > r+1, \\ x_j - \theta \alpha_{r+1\,j} & \text{dla } j < r+1. \end{cases}$$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta & \text{dla } j = r+1, \\ x_j & \text{dla } j > r+1, \\ x_j - \theta\alpha_{r+1\,j} & \text{dla } j < r+1. \end{cases}$$

Wymuszamy $\hat{\boldsymbol{x}} \geqslant \mathbf{0}$. Stąd

$$\begin{cases} x_{r+1} - \theta \geqslant 0, \\ x_j - \alpha_{r+1\,j}\theta \geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{r+1} \geqslant \theta, \\ x_j \geqslant \alpha_{r+1\,j}\theta. \end{cases}$$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta & \text{dla } j = r+1, \\ x_j & \text{dla } j > r+1, \\ x_j - \theta\alpha_{r+1\,j} & \text{dla } j < r+1. \end{cases}$$

Wymuszamy $\hat{\boldsymbol{x}} \geqslant \mathbf{0}$. Stąd

$$\begin{cases} x_{r+1} - \theta \geqslant 0, \\ x_j - \alpha_{r+1\,j}\theta \geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{r+1} \geqslant \theta, \\ x_j \geqslant \alpha_{r+1\,j}\theta. \end{cases}$$

Wybieramy $\theta_1 = \min\left\{\frac{x_j}{\alpha_{r+1\,j}} : \alpha_{r+1\,j} > 0, j \in [r]\right\}$, $\theta = \min\{x_{r+1}, \theta_1\}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

- Jeżeli $\theta = x_{r+1}$, to $\hat{x}_{r+1} = 0$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

- Jeżeli $\theta = x_{r+1}$, to $\hat{x}_{r+1} = 0$.
- Jeżeli $\theta = \theta_1 = \frac{x_k}{\alpha_{r+1\,k}}$, to $\hat{x}_k = 0$, $k < r + 1$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

- Jeżeli $\theta = x_{r+1}$, to $\hat{x}_{r+1} = 0$.
- Jeżeli $\theta = \theta_1 = \frac{x_k}{\alpha_{r+1\,k}}$, to $\hat{x}_k = 0$, $k < r + 1$.

$\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{X}$ i ma co najmniej jedną składową zerową więcej niż $\boldsymbol{x}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

- Jeżeli $\theta = x_{r+1}$, to $\hat{x}_{r+1} = 0$.
- Jeżeli $\theta = \theta_1 = \frac{x_k}{\alpha_{r+1\,k}}$, to $\hat{x}_k = 0$, $k < r+1$.

$\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{X}$ i ma co najmniej jedną składową zerową więcej niż $\boldsymbol{x}$.
Powtarzając to rozumowanie możemy otrzymać rozwiązanie dla, którego $r = t$. Wtedy otrzymujemy pierwszy przypadek $(r = t)$. $\square$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

- Jeżeli $\theta = x_{r+1}$, to $\hat{x}_{r+1} = 0$.
- Jeżeli $\theta = \theta_1 = \frac{x_k}{\alpha_{r+1\,k}}$, to $\hat{x}_k = 0$, $k < r + 1$.

$\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{X}$ i ma co najmniej jedną składową zerową więcej niż $\boldsymbol{x}$.
Powtarzając to rozumowanie możemy otrzymać rozwiązanie dla, którego $r = t$. Wtedy otrzymujemy pierwszy przypadek ($r = t$). $\square$

Wniosek

Jeżeli założenia założenia o rzędzie i o niesprzeczności są spełnione, to zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ ma skończoną liczbę wierzchołków.

Pytanie: Czy zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ jest domknięty i ograniczony?

Pytanie: Czy zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ jest domknięty i ograniczony?

- Jeśli odpowiedź brzmi "tak", wówczas z twierdzenia Weierstrassa $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ przyjmuje wartość największą oraz najmniejszą w $\mathbb{X}$.

Pytanie: Czy zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ jest domknięty i ograniczony?

- Jeśli odpowiedź brzmi "tak", wówczas z twierdzenia Weierstrassa $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ przyjmuje wartość największą oraz najmniejszą w $\mathbb{X}$.
- Domkniętość $\mathbb{X}$ wynika z postaci ograniczeń $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$.

Pytanie: Czy zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ jest domknięty i ograniczony?

- Jeśli odpowiedź brzmi "tak", wówczas z twierdzenia Weierstrassa $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ przyjmuje wartość największą oraz najmniejszą w $\mathbb{X}$.
- Domkniętość $\mathbb{X}$ wynika z postaci ograniczeń $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$.

Założenie (o ograniczoności z dołu)

Funkcja $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ jest ograniczona z dołu na zbiorze $\mathbb{X}$ (problem minimalizacji), tj. zbiór $\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \;:\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}\}$ jest z dołu ograniczony.

Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Lemat (Ograniczenie rozwiązania bazowego)

Niech $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *będzie rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu (*$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$*,* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$*,* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$*). Wtedy*

$$|x_j| \leqslant m!\alpha^{m-1}\beta,$$

gdzie $\alpha = \max_{i,j}\{|a_{ij}|\}$ *i* $\beta = \max_i\{|b_i|\}$*.*

Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Oszacowanie jest oczywiste, jeśli x_i nie jest zmienną bazową - wtedy $x_i = 0$.

Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Oszacowanie jest oczywiste, jeśli x_i nie jest zmienną bazową - wtedy $x_i = 0$.
Załóżmy, że x_i jest zmienną bazową. Wtedy

$$x_i = \text{wiersz}_i(\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{b} \quad \text{suma } m \text{ iloczynów.}$$

Każdy element macierzy $\boldsymbol{B}^{-1}$ jest ilorazem $\pm\det(\boldsymbol{B}_{ij})$, $\boldsymbol{B}_{ij} \in \mathbb{Z}^{(m-1)\times(m-1)}$, i $\det(\boldsymbol{B})$.

Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Oszacowanie jest oczywiste, jeśli x_i nie jest zmienną bazową - wtedy $x_i = 0$.
Założmy, że x_i jest zmienną bazową. Wtedy

$$x_i = \text{wiersz}_i(\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{b} \quad \text{suma } m \text{ iloczynów.}$$

Każdy element macierzy $\boldsymbol{B}^{-1}$ jest ilorazem $\pm\det(\boldsymbol{B}_{ij})$, $\boldsymbol{B}_{ij} \in \mathbb{Z}^{(m-1)\times(m-1)}$, i $\det(\boldsymbol{B})$. Ponieważ $\boldsymbol{B} \in \mathbb{Z}^{m\times m}$, $|\det(\boldsymbol{B})| \geqslant 1$.

$$\det(\boldsymbol{B}_{ij}) = \sum_{\sigma\in S_{m-1}} (-1)^{\mathrm{Inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{m-1\sigma(m-1)}.$$

Suma $(m-1)!$ iloczynów $m-1$ składników.

Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Oszacowanie jest oczywiste, jeśli x_i nie jest zmienną bazową - wtedy $x_i = 0$.
Załóżmy, że x_i jest zmienną bazową. Wtedy

$$x_i = \text{wiersz}_i(\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{b} \quad \text{suma } m \text{ iloczynów.}$$

Każdy element macierzy $\boldsymbol{B}^{-1}$ jest ilorazem $\pm\det(\boldsymbol{B}_{ij})$, $\boldsymbol{B}_{ij} \in \mathbb{Z}^{(m-1)\times(m-1)}$, i $\det(\boldsymbol{B})$. Ponieważ $\boldsymbol{B} \in \mathbb{Z}^{m\times m}$, $|\det(\boldsymbol{B})| \geqslant 1$.

$$\det(\boldsymbol{B}_{ij}) = \sum_{\sigma\in S_{m-1}} (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{m-1\sigma(m-1)}.$$

Suma $(m-1)!$ iloczynów $m-1$ składników. Zatem $|\det(\boldsymbol{B}_{ij})| \leqslant (m-1)!\alpha^{m-1}$. Stąd i z faktu, że $x_i = \text{wiersz}_i(\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{b}$ (suma m iloczynów), mamy ograniczenie $m!\alpha^{m-1}\beta$.

Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Twierdzenie

Jeżeli założenia założenia o rzędzie, o niesprzeczności i ograniczoności z dołu są spełnione, to problemy:

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \textit{przy warunkach } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \textit{przy warunkach } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \\ & x_j \leqslant M \qquad j \in [n] \end{aligned}$$

są równoważne, tj. ich optymalne wartości funkcji celu są sobie równe,

$$M = (m+1)!\alpha^m\beta, \alpha = \max_{i,j}\{|a_{ij}|, |c_j|\}, \beta = \max_i\{|b_i|, |z|\},$$

z jest największym dolnym ograniczeniem zbioru $\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$.

Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Jest oczywiste, że $\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ jest domknięty. Zatem istnieje $\mathbf{x}$ taki, że $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.

Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Jest oczywiste, że $\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$ jest domknięty. Zatem istnieje $\boldsymbol{x}$ taki, że $z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$. Rozważmy teraz układ ograniczeń:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} &= z \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Układ nie jest sprzeczny. Wszystkie jego rozwiązania są optymalne.

Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Jest oczywiste, że $\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$ jest domknięty. Zatem istnieje $\boldsymbol{x}$ taki, że $z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$. Rozważmy teraz układ ograniczeń:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} &= z \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Układ nie jest sprzeczny. Wszystkie jego rozwiązania są optymalne. Macierz układu jest rzędu $m + 1$. Wtedy posiada on co najmniej jedno rozwiązanie bazowe dopuszczalne. Jego składowe x_j spełniają ograniczenia $x_j \leqslant M$, $j \in [n]$. Ograniczenia nie wpływają na rozwiązania optymalne oryginalnego problemu.

Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Macierz układu jest rzędu m. Wtedy $\boldsymbol{c}^T$ można przedstawić jako kombinację liniową wierszy $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{c}^T = \sum_{i\in[m]} \gamma_i \boldsymbol{a}^T \text{ i } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \sum_{i\in[m]} \gamma_i b_i, \ \gamma_i \in \mathbb{R}.$$

Wszystkie rozwiązania $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ mają stały koszt $\sum_{i\in[m]} \gamma_i b_i$. Istnieje rozwiązanie optymalne bazowe dopuszczalne, którego składowe x_j oczywiście spełniają ograniczenia $x_j \leqslant M$, $j \in [n]$. $\square$

Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Macierz układu jest rzędu m. Wtedy $\boldsymbol{c}^T$ można przedstawić jako kombinację liniową wierszy $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{c}^T = \sum_{i \in [m]} \gamma_i \boldsymbol{a}^T \text{ i } \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \sum_{i \in [m]} \gamma_i b_i, \ \gamma_i \in \mathbb{R}.$$

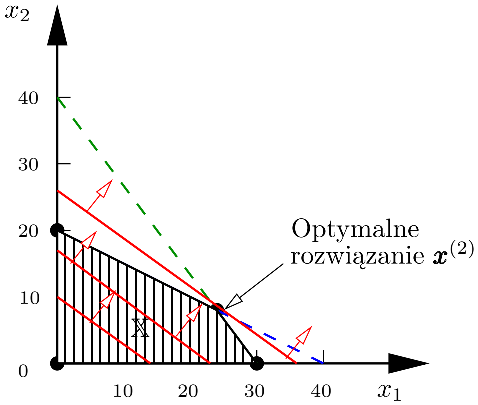
Wszystkie rozwiązania $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ mają stały koszt $\sum_{i \in [m]} \gamma_i b_i$. Istnieje rozwiązanie optymalne bazowe dopuszczalne, którego składowe x_j oczywiście spełniają ograniczenia $x_j \leqslant M$, $j \in [n]$. $\square$

Założenie (o ograniczoności)

Zbiór $\mathbb{X}$ jest ograniczony.

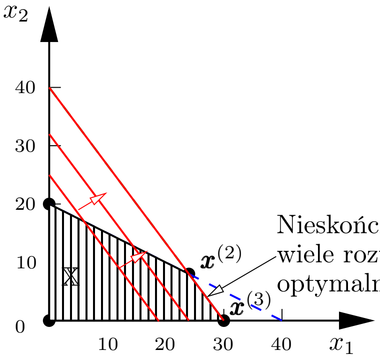
Geometryczna interpretacja problemu LP

$$
\begin{array}{rcrcl}
-4x_1 & - & 5x_2 & \to & \min \\
x_1 & + & \frac{3}{4}x_2 & \leqslant & 30 \\
2x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 80 \\
\multicolumn{5}{l}{x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0}
\end{array}
$$



Geometryczna interpretacja problemu LP...

$$
\begin{aligned}
-4x_1 - 3x_2 &\to \min \\
x_1 + \tfrac{3}{4}x_2 &\leqslant 30 \\
2x_1 + 4x_2 &\leqslant 80 \\
x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$



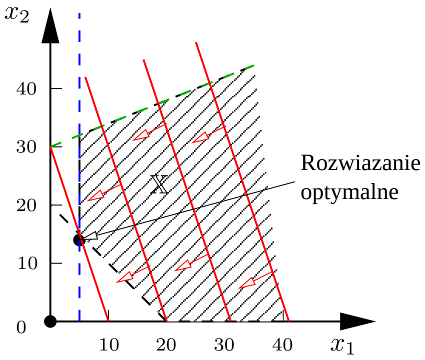
Nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych, $\boldsymbol{x}^* = \lambda\boldsymbol{x}^{(2)} + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(3)},\ \lambda \in [0,1]$

Geometryczna interpretacja problemu LP...

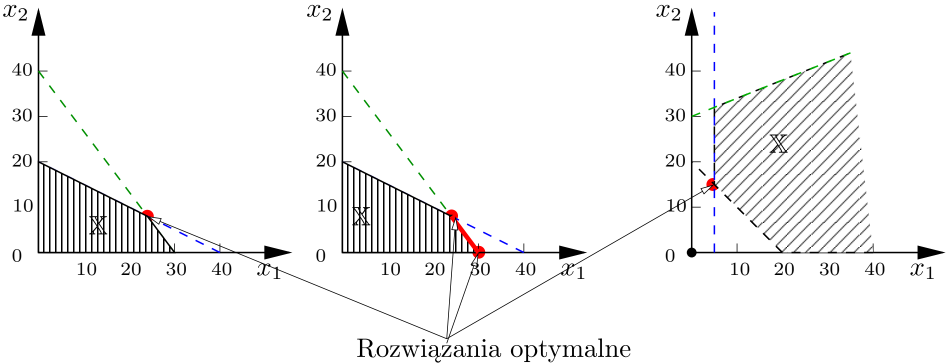
$$3x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \geqslant & 20 \\ -x_1 & + & 2.5x_2 & \leqslant & 75 \\ x_1 & & & \geqslant & 5 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$



Własność problemu liniowego programowania



Własność problemu liniowego programowania...

Twierdzenie (o optimum w wierzchołku)

Jeżeli założenia założenia o rzędzie, o niesprzeczności i ograniczoności są spełnione, to $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ *przyjmuje wartość najmniejszą w* $\mathbb{X}$ *w co najmniej jednym wierzchołku tego zbioru.*
Jeżeli kilka wierzchołków $\mathbb{X}$ *reprezentuje rozwiązanie optymalne, to wypukła kombinacja tych wierzchołków jest także rozwiązaniem optymalnym.*

Własność problemu liniowego programowania...

Twierdzenie (bez dowodu)

Jeżeli $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ *jest wielościanem wypukłym, każdy punkt* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ *można przestawić jako wypukła kombinację jego wierzchołków* $\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^\ell$*, tzn.*

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j\in[\ell]} \lambda_j \hat{\boldsymbol{x}}^j,$$

$$\sum_{j\in[\ell]} \lambda_j = 1,$$

$$\lambda_j \geqslant 0, j \in [\ell].$$

Inaczej

$$\mathbb{X} = \operatorname{conv}(\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^\ell),$$

$\operatorname{conv}(\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^\ell)$ *jest otoczką wypukłą punktów* $\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^\ell$.

Własność problemu liniowego programowania...

Dowód (twierdzenia o optimum w wierzchołku).

Niech $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{X}$ będzie rozwiązaniem optymalnym, tj.

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}.$$

Własność problemu liniowego programowania...

Dowód (twierdzenia o optimum w wierzchołku).
Niech $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{X}$ będzie rozwiązaniem optymalnym, tj.

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}.$$

Z twierdzenia “bez dowodu” $\boldsymbol{x}^*$ możemy przedstawić:

$$\boldsymbol{x}^* = \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \hat{\boldsymbol{x}}^j, \;\; \lambda_j \geqslant 0, \;\; j \in [\ell], \;\; \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j = 1,$$

gdzie $\hat{\boldsymbol{x}}^j$ są wierzchołkami $\mathbb{X}$.

Własność problemu liniowego programowania...

Zatem

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}^T \left(\sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \hat{\boldsymbol{x}}^j \right) = \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^j .$$

Własność problemu liniowego programowania...

Zatem

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}^T\left(\sum_{j\in[\ell]}\lambda_j\hat{\boldsymbol{x}}^j\right) = \sum_{j\in[\ell]}\lambda_j\boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^j.$$

Niech

$$\boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^r = \min_{j\in[\ell]} \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^j.$$

Własność problemu liniowego programowania...

Zatem

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}^T\left(\sum_{j\in[\ell]}\lambda_j\hat{\boldsymbol{x}}^j\right) = \sum_{j\in[\ell]}\lambda_j\boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^j.$$

Niech

$$\boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^r = \min_{j\in[\ell]}\boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^j.$$

Stąd

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \sum_{j\in[\ell]}\lambda_j\boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^j \geqslant \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^r\sum_{j\in[\ell]}\lambda_j = \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^r,$$

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^r.$$

Własność problemu liniowego programowania...

Ponieważ $\hat{\boldsymbol{x}}^r \in \mathbb{X}$, to

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^r .$$

Własność problemu liniowego programowania...

Ponieważ $\hat{\boldsymbol{x}}^r \in \mathbb{X}$, to

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^r.$$

Ostatecznie dostajemy

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^r.$$

Własność problemu liniowego programowania...

Ponieważ $\hat{\boldsymbol{x}}^r \in \mathbb{X}$, to

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^r.$$

Ostatecznie dostajemy

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^r.$$

koniec pierwszej części dowodu.

Własność problemu liniowego programowania...

Niech $\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^k$ będą takie, że

$$\boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^j = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^*, \ j \in [k].$$

Własność problemu liniowego programowania...

Niech $\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^k$ będą takie, że

$$\boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^j = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^*, \ j \in [k].$$

Weźmy kombinację wypukłą tych wierzchołków

$$\boldsymbol{x}' = \sum_{j \in [k]} \lambda_j \hat{\boldsymbol{x}}^j.$$

Własność problemu liniowego programowania...

Niech $\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^k$ będą takie, że

$$\boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^j = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^*, \; j \in [k].$$

Weźmy kombinację wypukłą tych wierzchołków

$$\boldsymbol{x}' = \sum_{j \in [k]} \lambda_j \hat{\boldsymbol{x}}^j.$$

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{c}^T \left(\sum_{j \in [k]} \lambda_j \hat{\boldsymbol{x}}^j \right) = \sum_{j \in [k]} \lambda_j \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^j = \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^* \sum_{j \in [k]} \lambda_j = \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^*.$$

Własność problemu liniowego programowania...

Niech $\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^k$ będą takie, że

$$\boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^j = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^*, \; j \in [k].$$

Weźmy kombinację wypukłą tych wierzchołków

$$\boldsymbol{x}' = \sum_{j \in [k]} \lambda_j \hat{\boldsymbol{x}}^j.$$

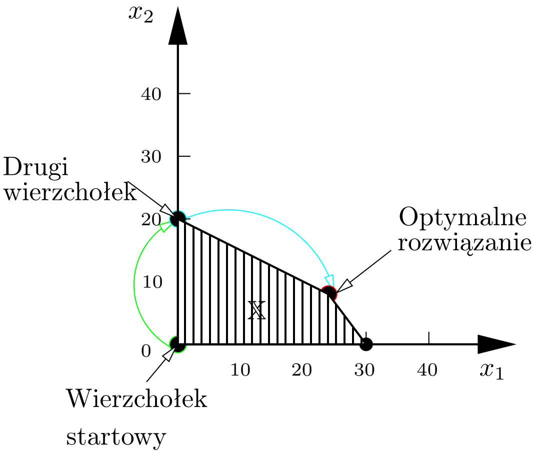
$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{c}^T \left(\sum_{j \in [k]} \lambda_j \hat{\boldsymbol{x}}^j \right) = \sum_{j \in [k]} \lambda_j \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^j = \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^* \sum_{j \in [k]} \lambda_j = \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^*.$$

$\square$

Idea algorytmu

Spostrzeżenie

Aby znaleźć rozwiązanie optymalne zadania programowania liniowego wystarczy inteligentnie przejrzeć wierzchołki zbioru rozwiązań dopuszczalnych (lub równoważnie rozwiązania bazowe dopuszczalne) i wybrać wierzchołek, w którym wartość funkcji celu jest optymalna.



Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książek

Ireneusz Nykowski.
Programowanie liniowe.
PWE, Warszawa, 1980.

Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz.
Combinatorial optimization: algorithms and complexity.
Dover Publications Inc., 1998.