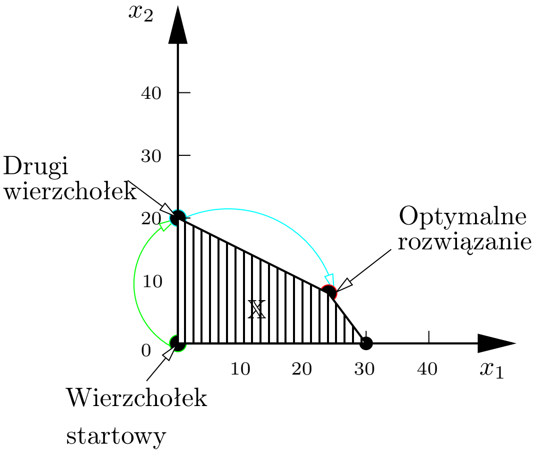
Metody optymalizacji
Wykład nr 4

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska

Idea algorytmu sympleks - przypomnienie

$$\mathbb{X} = \begin{cases} -4x_1 - 5x_2 \to \min \\ x_1 + \frac{3}{4}x_2 \leqslant 30 \\ 2x_1 + 4x_2 \leqslant 80 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$



Postać standardowa problemu LP

$$\mathbb{X} = \begin{cases} \min \; \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Postać standardowa problemu LP

$$\mathbb{X} = \begin{cases} \min \ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Załóżmy, że $\boldsymbol{x}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ ($\boldsymbol{x}^B \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$).

Postać standardowa problemu LP

$$\mathbb{X} = \begin{cases} \min \ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Załóżmy, że $\boldsymbol{x}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $(\boldsymbol{x}^B \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0})$.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \ \Leftrightarrow \ [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^B \\ \boldsymbol{x}^P \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{b}, \ \ \boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \text{ i } \boldsymbol{x}^B \geqslant \boldsymbol{0},$$

$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ i $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) = m$, $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$, $\boldsymbol{x}^B \in \mathbb{R}^m$ i $\boldsymbol{x}^P \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Postać standardowa problemu LP...

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= [\boldsymbol{B}|\boldsymbol{P}] & & \\
\boldsymbol{B} &= [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_m] & & \text{kolumny bazowe} \\
\boldsymbol{P} &= [\boldsymbol{P}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{P}_n] & & \text{kolumny niebazowe,}
\end{aligned}
$$

gdzie $\boldsymbol{B}_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \ldots, m$, $\boldsymbol{P}_k \in \mathbb{R}^m$, $k = m + 1, \ldots, n$.

Postać standardowa problemu LP...

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B}|\boldsymbol{P}]$$

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_m] \qquad \text{kolumny bazowe}$$

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{P}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{P}_n] \qquad \text{kolumny niebazowe,}$$

gdzie $\boldsymbol{B}_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \ldots, m$, $\boldsymbol{P}_k \in \mathbb{R}^m$, $k = m + 1, \ldots, n$.

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \leftrightarrow x_1^{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}_1 + x_2^{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}_2 + \cdots + x_m^{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{b}.$$

$x_1^{\boldsymbol{B}}, \ldots, x_m^{\boldsymbol{B}}$ są zmiennymi bazowymi,
współrzędnymi wektora $\boldsymbol{b}$ w bazie $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \ldots, \boldsymbol{B}_m]$.

Przejście do sąsiedniego wierzchołka

Przejście od rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ (bazy dopuszczalnej $\boldsymbol{B}$) do sąsiedniego rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{X}$ (bazy dopuszczalnej $\overline{\boldsymbol{B}}$), tzn.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T &= [x_1^{\boldsymbol{B}}, \ldots, {\color{red}x_{i^*}^{\boldsymbol{B}}}, \ldots, x_m^{\boldsymbol{B}}, \mathbf{0}]^T \to \overline{\boldsymbol{x}}^T = [x_1^{\boldsymbol{B}}, \ldots, x_{i^*-1}^{\boldsymbol{B}}, x_{i^*+1}^{\boldsymbol{B}}, \ldots, x_m^{\boldsymbol{B}}, {\color{blue}x_k^{\boldsymbol{P}}}, \mathbf{0}]^T \\ \boldsymbol{B} &= [\boldsymbol{B}_1, \ldots, , {\color{red}\boldsymbol{B}_{i^*}}, \ldots, \boldsymbol{B}_m] \to \overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i^*-1}, \boldsymbol{B}_{i^*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, {\color{blue}\boldsymbol{P}_k}]. \end{aligned}$$

Przejście do sąsiedniego wierzchołka

Przejście od rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ (bazy dopuszczalnej $\boldsymbol{B}$) do sąsiedniego rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{X}$ (bazy dopuszczalnej $\overline{\boldsymbol{B}}$), tzn.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^T &= [x_1^{\boldsymbol{B}}, \ldots, x_{i^*}^{\boldsymbol{B}}, \ldots, x_m^{\boldsymbol{B}}, \mathbf{0}]^T \longrightarrow \overline{\boldsymbol{x}}^T = [x_1^{\boldsymbol{B}}, \ldots, x_{i^*-1}^{\boldsymbol{B}}, x_{i^*+1}^{\boldsymbol{B}}, \ldots, x_m^{\boldsymbol{B}}, x_k^{\boldsymbol{P}}, \mathbf{0}]^T \\
\boldsymbol{B} &= [\boldsymbol{B}_1, \ldots, , \boldsymbol{B}_{i^*}, \ldots, \boldsymbol{B}_m] \longrightarrow \overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i^*-1}, \boldsymbol{B}_{i^*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{P}_k].
\end{aligned}
$$

Przejście polega na wymianie jednej zmiennej (kolumny):

Przejście do sąsiedniego wierzchołka

Przejście od rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ (bazy dopuszczalnej $\boldsymbol{B}$) do sąsiedniego rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{X}$ (bazy dopuszczalnej $\overline{\boldsymbol{B}}$), tzn.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T &= [x_1^{\boldsymbol{B}}, \dots, x_{i^*}^{\boldsymbol{B}}, \dots, x_m^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{0}]^T \to \overline{\boldsymbol{x}}^T = [x_1^{\boldsymbol{B}}, \dots, x_{i^*-1}^{\boldsymbol{B}}, x_{i^*+1}^{\boldsymbol{B}}, \dots, x_m^{\boldsymbol{B}}, x_k^{\boldsymbol{P}}, \boldsymbol{0}]^T \\ \boldsymbol{B} &= [\boldsymbol{B}_1, \dots, , \boldsymbol{B}_{i^*}, \dots, \boldsymbol{B}_m] \to \overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \dots, \boldsymbol{B}_{i^*-1}, \boldsymbol{B}_{i^*+1}, \dots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{P}_k]. \end{aligned}$$

Przejście polega na wymianie jednej zmiennej (kolumny):

- zmienna bazowa x_{i^*} (kolumna bazowa $\boldsymbol{B}_{i^*}$) wychodzi z bazy a zmienna niebazowa x_k (kolumna niebazowa $\boldsymbol{P}_k$) wchodzi,

Przejście do sąsiedniego wierzchołka

Przejście od rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ (bazy dopuszczalnej $\boldsymbol{B}$) do sąsiedniego rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{X}$ (bazy dopuszczalnej $\overline{\boldsymbol{B}}$), tzn.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T &= [x_1^{\boldsymbol{B}}, \ldots, x_{i^*}^{\boldsymbol{B}}, \ldots, x_m^{\boldsymbol{B}}, \mathbf{0}]^T \to \overline{\boldsymbol{x}}^T = [x_1^{\boldsymbol{B}}, \ldots, x_{i^*-1}^{\boldsymbol{B}}, x_{i^*+1}^{\boldsymbol{B}}, \ldots, x_m^{\boldsymbol{B}}, x_k^{\boldsymbol{P}}, \mathbf{0}]^T \\ \boldsymbol{B} &= [\boldsymbol{B}_1, \ldots, , \boldsymbol{B}_{i^*}, \ldots, \boldsymbol{B}_m] \to \overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i^*-1}, \boldsymbol{B}_{i^*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{P}_k]. \end{aligned}$$

Przejście polega na wymianie jednej zmiennej (kolumny):

- zmienna bazowa x_{i^*} (kolumna bazowa $\boldsymbol{B}_{i^*}$) wychodzi z bazy a zmienna niebazowa x_k (kolumna niebazowa $\boldsymbol{P}_k$) wchodzi,
- $\overline{\boldsymbol{x}}$ jest sąsiednim rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym (sąsiednim wierzchołkiem) a $\overline{\boldsymbol{B}}$ jest sąsiednią bazą.

Kryteria wyjścia i wejścia do bazy

Kryteria wyjścia: wyznacza zmienną x_{i^*} (kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$), która wychodzi z bazy, indeks i^*,

Kryteria wyjścia i wejścia do bazy

Kryteria wyjścia: wyznacza zmienną x_{i^*} (kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$), która wychodzi z bazy, indeks i^*,

Kryterium wejścia: wyznacza zmienną x_k (kolumnę $\boldsymbol{P}_k$), która wchodzi do bazy, indeks k.

Kryteria wyjścia i wejścia do bazy

Kryteria wyjścia: wyznacza zmienną x_{i^*} (kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$), która wychodzi z bazy, indeks i^*,

Kryterium wejścia: wyznacza zmienną x_k (kolumnę $\boldsymbol{P}_k$), która wchodzi do bazy, indeks k.

Oczywiście wszystko przy zachowaniu dopuszczalności konstruowanego sąsiedniego rozwiązania bazowego!!

Kryterium wyjścia

x_k ($\boldsymbol{P}_k$), $x_k = 0$, $k = m+1, \ldots, n$, wchodzi do $\overline{\boldsymbol{x}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}$ (wchodzi do $\overline{\boldsymbol{B}}$).
Kryterium wejścia podamy później.

Kryterium wyjścia

x_k ($\boldsymbol{P}_k$), $x_k = 0$, $k = m+1, \ldots, n$, wchodzi do $\overline{\boldsymbol{x}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}$ (wchodzi do $\overline{\boldsymbol{B}}$).
Kryterium wejścia podamy później.
Wybierzemy teraz indeks i^* zmiennej (kolumny), która przestanie być zmienną bazową (kolumną bazową).

Kryterium wyjścia

x_k ($\boldsymbol{P}_k$), $x_k = 0$, $k = m+1, \ldots, n$, wchodzi do $\overline{\boldsymbol{x}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}$ (wchodzi do $\overline{\boldsymbol{B}}$).
Kryterium wejścia podamy później.
Wybierzemy teraz indeks i^* zmiennej (kolumny), która przestanie być zmienną bazową (kolumną bazową).

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{P}_k\Theta_k + \boldsymbol{P}_k\Theta_k = \boldsymbol{b},$$

Kryterium wyjścia

x_k ($\boldsymbol{P}_k$), $x_k = 0$, $k = m + 1, \ldots, n$, wchodzi do $\overline{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}}$ (wchodzi do $\overline{\boldsymbol{B}}$).
Kryterium wejścia podamy później.
Wybierzemy teraz indeks i^* zmiennej (kolumny), która przestanie być zmienną bazową (kolumną bazową).

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{P}_k\Theta_k + \boldsymbol{P}_k\Theta_k = \boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_k\Theta_k) + \boldsymbol{P}_k\Theta_k = \boldsymbol{b},$$

Kryterium wyjścia

x_k ($\boldsymbol{P}_k$), $x_k = 0$, $k = m+1, \ldots, n$, wchodzi do $\overline{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{B}}$ (wchodzi do $\overline{\boldsymbol{B}}$).
Kryterium wejścia podamy później.
Wybierzemy teraz indeks i^* zmiennej (kolumny), która przestanie być zmienną bazową (kolumną bazową).

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{P}_k\Theta_k + \boldsymbol{P}_k\Theta_k = \boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_k\Theta_k) + \boldsymbol{P}_k\Theta_k = \boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{y}^k\Theta_k) + \boldsymbol{P}_k\Theta_k = \boldsymbol{b},$$

Kryterium wyjścia

x_k ($\boldsymbol{P}_k$), $x_k = 0$, $k = m+1, \ldots, n$, wchodzi do $\overline{\boldsymbol{x}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}$ (wchodzi do $\overline{\boldsymbol{B}}$).
Kryterium wejścia podamy później.
Wybierzemy teraz indeks i^* zmiennej (kolumny), która przestanie być zmienną bazową (kolumną bazową).

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{P}_k\Theta_k + \boldsymbol{P}_k\Theta_k = \boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_k\Theta_k) + \boldsymbol{P}_k\Theta_k = \boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{y}^k\Theta_k) + \boldsymbol{P}_k\Theta_k = \boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{B}}(\Theta_k) + \boldsymbol{P}_k\Theta_k = \boldsymbol{b},$$

Kryterium wyjścia

x_k ($\boldsymbol{P}_k$), $x_k = 0$, $k = m+1, \ldots, n$, wchodzi do $\overline{\boldsymbol{x}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}$ (wchodzi do $\overline{\boldsymbol{B}}$).
Kryterium wejścia podamy później.
Wybierzemy teraz indeks i^* zmiennej (kolumny), która przestanie być zmienną bazową (kolumną bazową).

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{P}_k\Theta_k + \boldsymbol{P}_k\Theta_k &= \boldsymbol{b},\\
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_k\Theta_k) + \boldsymbol{P}_k\Theta_k &= \boldsymbol{b},\\
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{y}^k\Theta_k) + \boldsymbol{P}_k\Theta_k &= \boldsymbol{b},\\
\boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{B}}(\Theta_k) + \boldsymbol{P}_k\Theta_k &= \boldsymbol{b},
\end{aligned}$$

gdzie $\Theta_k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}^k = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_k \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{y}^k$ jest przedstawieniem kolumny niebazowej $\boldsymbol{P}_k$ w aktualnej bazie $\boldsymbol{B}$.

Kryterium wyjścia...

$$\overline{\boldsymbol{x}}(\Theta_k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^B - \boldsymbol{y}^k\Theta_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Theta_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kryterium wyjścia...

$$\bar{\boldsymbol{x}}(\Theta_k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^B - \boldsymbol{y}^k\Theta_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Theta_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wymuszamy dopuszczalność sąsiedniego rozwiązania $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{X}$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^B - \boldsymbol{y}^k\Theta_k \geqslant \boldsymbol{0} \\ \Theta_k \geqslant 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_i^B - y_i^k\Theta_k \geqslant 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant m \\ \Theta_k \geqslant 0 \end{cases}$$

Kryterium wyjścia...

Musimy rozpatrzyć dwa przypadki:

Kryterium wyjścia...

Musimy rozpatrzyć dwa przypadki:

1. jeśli $y_i^k \leqslant 0$, to $x_i^{\boldsymbol{B}} - y_i^k \Theta_k \geqslant 0$ dla $\Theta_k \in [0, +\infty)$,

Kryterium wyjścia...

Musimy rozpatrzyć dwa przypadki:

1. jeśli $y_i^k \leqslant 0$, to $x_i^{\boldsymbol{B}} - y_i^k \Theta_k \geqslant 0$ dla $\Theta_k \in [0, +\infty)$,
2. jeśli $y_i^k > 0$, to $x_i^{\boldsymbol{B}} - y_i^k \Theta_k \geqslant 0$ dla $\Theta_k \in [0, \frac{x_i^{\boldsymbol{B}}}{y_i^k}]$.

Kryterium wyjścia...

Musimy rozpatrzyć dwa przypadki:

1. jeśli $y_i^k \leqslant 0$, to $x_i^{\boldsymbol{B}} - y_i^k \Theta_k \geqslant 0$ dla $\Theta_k \in [0, +\infty)$,
2. jeśli $y_i^k > 0$, to $x_i^{\boldsymbol{B}} - y_i^k \Theta_k \geqslant 0$ dla $\Theta_k \in [0, \frac{x_i^{\boldsymbol{B}}}{y_i^k}]$.

Spostrzeżenie

Skonstruowane rozwiązanie $\overline{\boldsymbol{x}}(\Theta_k)$ *jest rozwiązaniem dopuszczalnym* $\overline{\boldsymbol{x}}(\Theta_k) \in \mathbb{X}$ *(niekoniecznie bazowym), wtedy i tylko wtedy, gdy* $0 \leqslant \Theta_k \leqslant \overline{\Theta}_k$*, gdzie*

$$\overline{\Theta}_k = \begin{cases} +\infty & \text{jeśli dla } i = 1, \ldots, m \ y_i^k \leqslant 0, \\ \min\left\{ \frac{x_i^{\boldsymbol{B}}}{y_i^k} \ : \ y_i^k > 0, 1 \leqslant i \leqslant m \right\} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Kryterium wyjścia...

Twierdzenie (Kryterium wyjścia)

Niech $\mathbf{x}$ będzie rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^P]^T$ ($\mathbf{x}^B \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^P = \mathbf{0}$). Jeżeli w wektorze $(\mathbf{y}^k)^T = [y_1^k, \ldots, y_m^k]^T$ przynajmniej jedna składowa jest dodatnia i

$$\overline{\Theta}_k = \frac{x_{i*}^B}{y_{i*}^k} = \min\left\{\frac{x_i^B}{y_i^k} \ : \ y_i^k > 0, 1 \leqslant i \leqslant m\right\}, \qquad (1)$$

to $\overline{\mathbf{x}}(\overline{\Theta}_k)$ jest sąsiednim rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym.

Kryterium wyjścia...

Załóżmy, że minimum w (1) zostało osiągnięte dla $\frac{x^{\boldsymbol{B}}_{i*}}{y^k_{i*}}$, czyli $\overline{\Theta}_k = \frac{x^{\boldsymbol{B}}_{i*}}{y^k_{i*}}$.

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{x}}(\overline{\Theta}_k) = \overline{\boldsymbol{x}}(x^{\boldsymbol{B}}_{i*}/y^k_{i*}) = \begin{bmatrix} x^{\boldsymbol{B}}_1 - \frac{x^{\boldsymbol{B}}_{i*}}{y^k_{i*}} y^k_1 \\ \vdots \\ x^{\boldsymbol{B}}_{i*-1} - \frac{x^{\boldsymbol{B}}_{i*}}{y^k_{i*}} y^k_{i*-1} \\ x^{\boldsymbol{B}}_{i*} - \frac{x^{\boldsymbol{B}}_{i*}}{y^k_{i*}} y^k_{i*} \\ x^{\boldsymbol{B}}_{i*+1} - \frac{x^{\boldsymbol{B}}_{i*}}{y^k_{i*}} y^k_{i*+1} \\ \vdots \\ x^{\boldsymbol{B}}_m - \frac{x^{\boldsymbol{B}}_{i*}}{y^k_{i*}} y^k_m \\ 0 \\ \frac{x^{\boldsymbol{B}}_{i*}}{y^k_{i*}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{\boldsymbol{B}}_1 - \frac{x^{\boldsymbol{B}}_{i*}}{y^k_{i*}} y^k_1 \\ \vdots \\ x^{\boldsymbol{B}}_{i*-1} - \frac{x^{\boldsymbol{B}}_{i*}}{y^k_{i*}} y^k_{i*-1} \\ 0 \\ x^{\boldsymbol{B}}_{i*+1} - \frac{x^{\boldsymbol{B}}_{i*}}{y^k_{i*}} y^k_{i*+1} \\ \vdots \\ x^{\boldsymbol{B}}_m - \frac{x^{\boldsymbol{B}}_{i*}}{y^k_{i*}} y^k_m \\ 0 \\ \frac{x^{\boldsymbol{B}}_{i*}}{y^k_{i*}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nowa sąsiednia baza $\overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i*-1}, \boldsymbol{B}_{i*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{P}_k]$.

Kryterium wyjścia...

Uwagi:

- Jeżeli żadna składowa wektora $\boldsymbol{y}^k$ nie jest dodatnia (zob. Kryterium wyjścia), wówczas zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ jest nieograniczony.

Kryterium wyjścia...

Uwagi:

- Jeżeli żadna składowa wektora $\boldsymbol{y}^k$ nie jest dodatnia (zob. Kryterium wyjścia), wówczas zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ jest nieograniczony.
- Zatem przy konstrukcji sąsiedniego rozwiązania bazowego dopuszczalnego algorytm jest wstanie stwierdzić, czy wartość funkcji celu jest ograniczona z dołu na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.
  Jeśli nie jest, to algorytm sympleks kończy działanie!

Kryterium wejścia

Prześledźmy jak zmienia się wartość celu $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ przy przejściu od rozwiązania $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ do $\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{x}}(\overline{\Theta}_k) \in \mathbb{X}$.

Kryterium wejścia

Prześledźmy jak zmienia się wartość celu $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ przy przejściu od rozwiązania $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ do $\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{x}}(\overline{\Theta}_k) \in \mathbb{X}$.
Wartość funkcji celu (stara) dla rozwiązania $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T \in \mathbb{X}$ (starego):

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{x}^B,$$

gdzie $\boldsymbol{x}^P = \mathbf{0}$ i $(\boldsymbol{c}^B)^T = [c_1, \ldots, c_m]$.

Kryterium wejścia

Prześledźmy jak zmienia się wartość celu $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ przy przejściu od rozwiązania $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ do $\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{x}}(\overline{\Theta}_k) \in \mathbb{X}$.
Wartość funkcji celu (stara) dla rozwiązania $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}}]^T \in \mathbb{X}$ (starego):

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}},$$

gdzie $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0}$ i $(\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T = [c_1, \ldots, c_m]$.
Wartość funkcji celu (nowa) dla rozwiązania $\overline{\boldsymbol{x}}(\overline{\Theta}_k) \in \mathbb{X}$ (nowego):

$$\boldsymbol{c}^T\overline{\boldsymbol{x}}(\overline{\Theta}_k) = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} - \overline{\Theta}_k\boldsymbol{y}^k) + c_k\overline{\Theta}_k = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} - \overline{\Theta}_k(\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T\boldsymbol{y}^k + c_k\overline{\Theta}_k$$

Kryterium wejścia

Prześledźmy jak zmienia się wartość celu $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ przy przejściu od rozwiązania $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ do $\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{x}}(\overline{\Theta}_k) \in \mathbb{X}$.
Wartość funkcji celu (stara) dla rozwiązania $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T \in \mathbb{X}$ (starego):

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{x}^B,$$

gdzie $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$ i $(\boldsymbol{c}^B)^T = [c_1, \ldots, c_m]$.
Wartość funkcji celu (nowa) dla rozwiązania $\overline{\boldsymbol{x}}(\overline{\Theta}_k) \in \mathbb{X}$ (nowego):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}^T\overline{\boldsymbol{x}}(\overline{\Theta}_k) &= (\boldsymbol{c}^B)^T(\boldsymbol{x}^B - \overline{\Theta}_k\boldsymbol{y}^k) + c_k\overline{\Theta}_k = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{x}^B - \overline{\Theta}_k(\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{y}^k + c_k\overline{\Theta}_k \\ &= (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{x}^B + \overline{\Theta}_k(c_k - (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{y}^k) = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{x}^B + \overline{\Theta}_k(c_k - z_k),\end{aligned}$$

gdzie $z_k = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{y}^k$.

Kryterium wejścia...

Wyrażenie $\overline{\Theta}_k(c_k - z_k)$ jest poprawką starej wartości funkcji celu

$$(\mathbf{c}^B)^T\mathbf{x}^B$$

Kryterium wejścia...

Wyrażenie $\overline{\Theta}_k(c_k - z_k)$ jest poprawką starej wartości funkcji celu

$$(\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{x}^B$$

Jeśli $c_k - z_k < 0$, to

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{x}^B > \boldsymbol{c}^T \overline{\boldsymbol{x}}(\overline{\Theta}_k),$$

co prowadzi do poprawy wartości funkcji celu dla nowego rozwiązania $\overline{\boldsymbol{x}}(\overline{\Theta}_k)$.

Kryterium wejścia...

Wyrażenie $\overline{\Theta}_k(c_k - z_k)$ jest poprawką starej wartości funkcji celu

$$(\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{x}^B$$

Jeśli $c_k - z_k < 0$, to

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{x}^B > \boldsymbol{c}^T \overline{\boldsymbol{x}}(\overline{\Theta}_k),$$

co prowadzi do poprawy wartości funkcji celu dla nowego rozwiązania $\overline{\boldsymbol{x}}(\overline{\Theta}_k)$.

Spostrzeżenie

Jeżeli istnieje kolumna niebazowa $\boldsymbol{P}_k$, $k = m+1, \ldots, n$, dla której $c_k - z_k < 0$, to aktualne rozwiązanie bazowe dopuszczalne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ jest nieoptymalne.

Kryterium wejścia (zachłanne)

Kryterium wejścia (zachłanne)

Indeks zmiennej (kolumny) k, $k = m+1, \ldots, n$, wchodzącej do bazy może być wyznaczony w sposób zachłanny, tj.

$$c_k - z_k = \min\{c_j - z_j \,:\, c_j - z_j < 0, m+1 \leqslant j \leqslant n\}. \tag{2}$$

Kryterium wejścia (zachłanne)

Kryterium wejścia (zachłanne)
Indeks zmiennej (kolumny) k, $k = m+1, \ldots, n$, wchodzącej do bazy może być wyznaczony w sposób zachłanny, tj.

$$c_k - z_k = \min\{c_j - z_j \,:\, c_j - z_j < 0, m+1 \leqslant j \leqslant n\}. \tag{2}$$

- Kryterium zachłanne (2) jest jednym z kryteriów wejścia - wadą tego kryterium jest koszt obliczeniowy.

Kryterium wejścia (zachłanne)

Kryterium wejścia (zachłanne)

Indeks zmiennej (kolumny) k, $k = m+1, \ldots, n$, wchodzącej do bazy może być wyznaczony w sposób zachłanny, tj.

$$c_k - z_k = \min\{c_j - z_j \, : \, c_j - z_j < 0, m+1 \leqslant j \leqslant n\}. \tag{2}$$

- Kryterium zachłanne (2) jest jednym z kryteriów wejścia - wadą tego kryterium jest koszt obliczeniowy.
- Możemy również wybrać pierwszą kolumnę niebazową j, dla której $c_j - z_j < 0$.

Kryterium optymalności

Twierdzenie (Kryterium optymalności)

Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ będzie rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^P]^T$ ($\mathbf{x}^B \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^P = \mathbf{0}$). Jeżeli dla wszystkich kolumn $\mathbf{P}_k$ (zmiennych) niebazowych, $k = m+1, \ldots, n$, zachodzą nierówności:

$$c_k - z_k \geqslant 0, \; k = m+1, \ldots, n,$$

gdzie $z_k = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{y}^k$, to $\mathbf{x}$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu LP.

Kryterium optymalności

Twierdzenie (Kryterium optymalności)

Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ *będzie rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym,* $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^P]^T$ $(\mathbf{x}^B \geqslant \mathbf{0}, \mathbf{x}^P = \mathbf{0})$*. Jeżeli dla wszystkich kolumn* $\mathbf{P}_k$ *(zmiennych) niebazowych,* $k = m+1, \ldots, n$*, zachodzą nierówności:*

$$c_k - z_k \geqslant 0, \;\; k = m+1, \ldots, n,$$

gdzie $z_k = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{y}^k$*, to* $\mathbf{x}$ *jest rozwiązaniem optymalnym problemu LP. Dla kolumn bazowych* $\mathbf{B}_i$ *zachodzą równości:* $c_i - z_i = 0$*,* $i = 1, \ldots, m$*.*

Kryterium optymalności

Twierdzenie (Kryterium optymalności)

Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ *będzie rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym,* $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^P]^T$ $(\mathbf{x}^B \geqslant \mathbf{0}, \mathbf{x}^P = \mathbf{0})$*. Jeżeli dla wszystkich kolumn* $\mathbf{P}_k$ *(zmiennych) niebazowych,* $k = m + 1, \ldots, n$*, zachodzą nierówności:*

$$c_k - z_k \geqslant 0, \; k = m + 1, \ldots, n,$$

gdzie $z_k = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{y}^k$*, to* $\mathbf{x}$ *jest rozwiązaniem optymalnym problemu LP. Dla kolumn bazowych* $\mathbf{B}_i$ *zachodzą równości:* $c_i - z_i = 0$*,* $i = 1, \ldots, m$*. Zatem kryterium wejścia można zapisać w formie wektorowej:*

$$\mathbf{c} - \mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n.$$

Kryterium optymalności

Dowód.

Niech $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}$ będzie dowolnym rozwiązaniem dopuszczalnym, niekoniecznie, bazowym, tj.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{y} &\geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Kryterium optymalności

Dowód.

Niech $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}$ będzie dowolnym rozwiązaniem dopuszczalnym, niekoniecznie, bazowym, tj.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{y} &\geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Pokażemy, że

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}.$$

Kryterium optymalności

Dowód.

Niech $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}$ będzie dowolnym rozwiązaniem dopuszczalnym, niekoniecznie, bazowym, tj.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}$$

Pokażemy, że

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}.$$

Macierz $\boldsymbol{A}$ możemy zapisać jako wektor kolumn, tj. $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n]$.

Kryterium optymalności

Dowód.

Niech $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}$ będzie dowolnym rozwiązaniem dopuszczalnym, niekoniecznie, bazowym, tj.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{y} &\geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Pokażemy, że

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}.$$

Macierz $\boldsymbol{A}$ możemy zapisać jako wektor kolumn, tj. $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_n]$. Spełniony jest warunek optymalności

$$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}.$$

Kryterium optymalności...

Ponieważ $\boldsymbol{y} \geqslant \mathbf{0}$, więc

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{y} \geqslant 0.$$

Kryterium optymalności...

Ponieważ $\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}$, więc

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{y} \geqslant 0.$$

Stąd

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{y} = [(\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_1, \ldots, (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_n]\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}[\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n]\boldsymbol{y}$$

Kryterium optymalności...

Ponieważ $\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}$, więc

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{y} \geqslant 0.$$

Stąd

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{y} = [(\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_1, \ldots, (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_n]\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}[\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n]\boldsymbol{y}$$
$$= (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.$$

Kryterium optymalności...

Ponieważ $\boldsymbol{y} \geqslant \mathbf{0}$, więc

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{y} \geqslant 0.$$

Stąd

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{y} &= [(\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_1, \ldots, (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_n]\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}[\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n]\boldsymbol{y} \\ &= (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że dla dowolnego $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}$ jest spełniona nierówność

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.$$

Kryterium optymalności...

Ponieważ $\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}$, więc

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{y} \geqslant 0.$$

Stąd

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{y} &= [(\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_1, \ldots, (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_n]\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}[\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n]\boldsymbol{y} \\ &= (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że dla dowolnego $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}$ jest spełniona nierówność

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.$$

Zatem $\boldsymbol{x}$ jest optymalnym rozwiązaniem. $\square$

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).

.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}}]^T$ $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

krok 3. Ustal kolumnę $\boldsymbol{P}_k$ (zmienną x_k) wchodzącą do bazy, **kryterium wejścia**.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}}]^T$ $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

krok 3. Ustal kolumnę $\boldsymbol{P}_k$ (zmienną x_k) wchodzącą do bazy, **kryterium wejścia**.

krok 4. Wybierz kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$ (zmienną x_{i^*}) wychodzącą, **kryterium wyjścia**.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

krok 3. Ustal kolumnę $\boldsymbol{P}_k$ (zmienną x_k) wchodzącą do bazy, **kryterium wejścia**.

krok 4. Wybierz kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$ (zmienną x_{i^*}) wychodzącą, **kryterium wyjścia**.
Jeżeli dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$, $y_i^k \leqslant 0$, to **STOP** (nie ma rozwiązania optymalnego skończonego).

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

krok 3. Ustal kolumnę $\boldsymbol{P}_k$ (zmienną x_k) wchodzącą do bazy, **kryterium wejścia**.

krok 4. Wybierz kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$ (zmienną x_{i^*}) wychodzącą, **kryterium wyjścia**.
Jeżeli dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$, $y_i^k \leqslant 0$, to **STOP** (nie ma rozwiązania optymalnego skończonego).

krok 5. Skonstruuj sąsiednie rozwiązanie bazowe $\overline{\boldsymbol{x}}$.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

krok 3. Ustal kolumnę $\boldsymbol{P}_k$ (zmienną x_k) wchodzącą do bazy, **kryterium wejścia**.

krok 4. Wybierz kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$ (zmienną x_{i^*}) wychodzącą, **kryterium wyjścia**.
Jeżeli dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$, $y_i^k \leqslant 0$, to **STOP** (nie ma rozwiązania optymalnego skończonego).

krok 5. Skonstruuj sąsiednie rozwiązanie bazowe $\overline{\boldsymbol{x}}$. Wyznacz współrzędne $\overline{\boldsymbol{y}}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w nowej bazie $\overline{\boldsymbol{B}}$.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

krok 3. Ustal kolumnę $\boldsymbol{P}_k$ (zmienną x_k) wchodzącą do bazy, **kryterium wejścia**.

krok 4. Wybierz kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$ (zmienną x_{i^*}) wychodzącą, **kryterium wyjścia**.
Jeżeli dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$, $y_i^k \leqslant 0$, to **STOP** (nie ma rozwiązania optymalnego skończonego).

krok 5. Skonstruuj sąsiednie rozwiązanie bazowe $\overline{\boldsymbol{x}}$. Wyznacz współrzędne $\overline{\boldsymbol{y}}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w nowej bazie $\overline{\boldsymbol{B}}$.
Podstaw $\boldsymbol{x} \leftarrow \overline{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{y}^j \leftarrow \overline{\boldsymbol{y}}^j$, $\boldsymbol{B} \leftarrow \overline{\boldsymbol{B}}$.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

krok 3. Ustal kolumnę $\boldsymbol{P}_k$ (zmienną x_k) wchodzącą do bazy, **kryterium wejścia**.

krok 4. Wybierz kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$ (zmienną x_{i^*}) wychodzącą, **kryterium wyjścia**.
Jeżeli dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$, $y_i^k \leqslant 0$, to **STOP** (nie ma rozwiązania optymalnego skończonego).

krok 5. Skonstruuj sąsiednie rozwiązanie bazowe $\overline{\boldsymbol{x}}$. Wyznacz współrzędne $\overline{\boldsymbol{y}}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w nowej bazie $\overline{\boldsymbol{B}}$.
Podstaw $\boldsymbol{x} \leftarrow \overline{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{y}^j \leftarrow \overline{\boldsymbol{y}}^j$, $\boldsymbol{B} \leftarrow \overline{\boldsymbol{B}}$. Przejdź do **kroku 2.**

Szkic algorytmu sympleks...

Wyjaśnienia wymaga **krok 1** algorytmu sympleks.
W kroku tym wybieramy początkowe rozwiązanie bazowe dopuszczalne.
W dalszej części wykładu przedstawimy metodę konstrukcji takiego rozwiązania - jeśli zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest niepusty.
W przypadku, gdy zbiór rozwiązań jest pusty algorytm zasygnalizuje ten fakt i zakończy działanie.

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książek

- Ireneusz Nykowski.
  Programowanie liniowe.
  PWE, Warszawa, 1980.
- Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz.
  Combinatorial optimization: algorithms and complexity.
  Dover Publications Inc., 1998.