Metody optymalizacji
Wykład nr 5

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).

.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}}]^T$ $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \dots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}}]^T$ $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

krok 3. Ustal kolumnę $\boldsymbol{P}_k$ (zmienną x_k) wchodzącą do bazy, **kryterium wejścia**.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

krok 3. Ustal kolumnę $\boldsymbol{P}_k$ (zmienną x_k) wchodzącą do bazy, **kryterium wejścia**.

krok 4. Wybierz kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$ (zmienną x_{i^*}) wychodzącą, **kryterium wyjścia**.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

krok 3. Ustal kolumnę $\boldsymbol{P}_k$ (zmienną x_k) wchodzącą do bazy, **kryterium wejścia**.

krok 4. Wybierz kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$ (zmienną x_{i^*}) wychodzącą, **kryterium wyjścia**.
Jeżeli dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$, $y_i^k \leqslant 0$, to **STOP** (nie ma rozwiązania optymalnego skończonego).

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

krok 3. Ustal kolumnę $\boldsymbol{P}_k$ (zmienną x_k) wchodzącą do bazy, **kryterium wejścia**.

krok 4. Wybierz kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$ (zmienną x_{i^*}) wychodzącą, **kryterium wyjścia**.
Jeżeli dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$, $y_i^k \leqslant 0$, to **STOP** (nie ma rozwiązania optymalnego skończonego).

krok 5. Skonstruuj sąsiednie rozwiązanie bazowe $\overline{\boldsymbol{x}}$.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

krok 3. Ustal kolumnę $\boldsymbol{P}_k$ (zmienną x_k) wchodzącą do bazy, **kryterium wejścia**.

krok 4. Wybierz kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$ (zmienną x_{i^*}) wychodzącą, **kryterium wyjścia**.
Jeżeli dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$, $y_i^k \leqslant 0$, to **STOP** (nie ma rozwiązania optymalnego skończonego).

krok 5. Skonstruuj sąsiednie rozwiązanie bazowe $\overline{\boldsymbol{x}}$. Wyznacz współrzędne $\overline{\boldsymbol{y}}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w nowej bazie $\overline{\boldsymbol{B}}$.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

krok 3. Ustal kolumnę $\boldsymbol{P}_k$ (zmienną x_k) wchodzącą do bazy, **kryterium wejścia**.

krok 4. Wybierz kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$ (zmienną x_{i^*}) wychodzącą, **kryterium wyjścia**.
Jeżeli dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$, $y_i^k \leqslant 0$, to **STOP** (nie ma rozwiązania optymalnego skończonego).

krok 5. Skonstruuj sąsiednie rozwiązanie bazowe $\overline{\boldsymbol{x}}$. Wyznacz współrzędne $\overline{\boldsymbol{y}}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w nowej bazie $\overline{\boldsymbol{B}}$.
Podstaw $\boldsymbol{x} \leftarrow \overline{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{y}^j \leftarrow \overline{\boldsymbol{y}}^j$, $\boldsymbol{B} \leftarrow \overline{\boldsymbol{B}}$.

Szkic algorytmu sympleks

krok 1. Wybierz bazę początkową $\boldsymbol{B}$ (bazowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^B, \boldsymbol{x}^P]^T$ $\boldsymbol{x}^B \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^P = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$).
Wyznacz współrzędne $\boldsymbol{y}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w bazie $\boldsymbol{B}$.

krok 2. Sprawdź **kryterium optymalności**.
Jeżeli $\boldsymbol{x}$ jest optymalne, to **STOP**.

krok 3. Ustal kolumnę $\boldsymbol{P}_k$ (zmienną x_k) wchodzącą do bazy, **kryterium wejścia**.

krok 4. Wybierz kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$ (zmienną x_{i^*}) wychodzącą, **kryterium wyjścia**.
Jeżeli dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$, $y_i^k \leqslant 0$, to **STOP** (nie ma rozwiązania optymalnego skończonego).

krok 5. Skonstruuj sąsiednie rozwiązanie bazowe $\overline{\boldsymbol{x}}$. Wyznacz współrzędne $\overline{\boldsymbol{y}}^j$ kolumn $\boldsymbol{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$, w nowej bazie $\overline{\boldsymbol{B}}$.
Podstaw $\boldsymbol{x} \leftarrow \overline{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{y}^j \leftarrow \overline{\boldsymbol{y}}^j$, $\boldsymbol{B} \leftarrow \overline{\boldsymbol{B}}$. Przejdź do **kroku 2.**

Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, , \boldsymbol{B}_{i^*}, \ldots, \boldsymbol{B}_m] \rightarrow \overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i^*-1}, \boldsymbol{B}_{i^*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{P}_k].$$

Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, , \boldsymbol{B}_{i^*}, \ldots, \boldsymbol{B}_m] \to \overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i^*-1}, \boldsymbol{B}_{i^*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{P}_k].$$

Kolumna bazowa $\boldsymbol{B}_{i^*}$ wychodzi z bazy, kolumna niebazowa $\boldsymbol{P}_k$ wchodzi.

Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, , \boldsymbol{B}_{i*}, \ldots, \boldsymbol{B}_m] \rightarrow \overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i*-1}, \boldsymbol{B}_{i*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{P}_k].$$

Kolumna bazowa $\boldsymbol{B}_{i*}$ wychodzi z bazy, kolumna niebazowa $\boldsymbol{P}_k$ wchodzi. Przedstawmy kolumnę niebazową $\boldsymbol{P}_k$ w starej bazie $\boldsymbol{B}$

$$y_1^k \boldsymbol{B}_1 + \cdots + y_{i*-1}^k \boldsymbol{B}_{i*-1} + y_{i*}^k \boldsymbol{B}_{i*} + y_{i*+1}^k \boldsymbol{B}_{i*+1} + \cdots + y_m^k \boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{P}_k \quad (1)$$

Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, , \boldsymbol{B}_{i^*}, \ldots, \boldsymbol{B}_m] \rightarrow \overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i^*-1}, \boldsymbol{B}_{i^*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{P}_k].$$

Kolumna bazowa $\boldsymbol{B}_{i^*}$ wychodzi z bazy, kolumna niebazowa $\boldsymbol{P}_k$ wchodzi. Przedstawmy kolumnę niebazową $\boldsymbol{P}_k$ w starej bazie $\boldsymbol{B}$

$$y_1^k \boldsymbol{B}_1 + \cdots + y_{i^*-1}^k \boldsymbol{B}_{i^*-1} + y_{i^*}^k \boldsymbol{B}_{i^*} + y_{i^*+1}^k \boldsymbol{B}_{i^*+1} + \cdots + y_m^k \boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{P}_k \qquad (1)$$

Przedstawmy kolumnę niebazową $\boldsymbol{P}_j$ w starej bazie

$$y_1^j \boldsymbol{B}_1 + \cdots + y_{i^*-1}^j \boldsymbol{B}_{i^*-1} + y_{i^*}^j \boldsymbol{B}_{i^*} + y_{i^*+1}^j \boldsymbol{B}_{i^*+1} + \cdots + y_m^j \boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{P}_j \qquad (2)$$

Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, , \boldsymbol{B}_{i^*}, \ldots, \boldsymbol{B}_m] \to \overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i^*-1}, \boldsymbol{B}_{i^*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{P}_k].$$

Kolumna bazowa $\boldsymbol{B}_{i^*}$ wychodzi z bazy, kolumna niebazowa $\boldsymbol{P}_k$ wchodzi. Przedstawmy kolumnę niebazową $\boldsymbol{P}_k$ w starej bazie $\boldsymbol{B}$

$$y_1^k \boldsymbol{B}_1 + \cdots + y_{i^*-1}^k \boldsymbol{B}_{i^*-1} + y_{i^*}^k \boldsymbol{B}_{i^*} + y_{i^*+1}^k \boldsymbol{B}_{i^*+1} + \cdots + y_m^k \boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{P}_k \qquad (1)$$

Przedstawmy kolumnę niebazową $\boldsymbol{P}_j$ w starej bazie

$$y_1^j \boldsymbol{B}_1 + \cdots + y_{i^*-1}^j \boldsymbol{B}_{i^*-1} + y_{i^*}^j \boldsymbol{B}_{i^*} + y_{i^*+1}^j \boldsymbol{B}_{i^*+1} + \cdots + y_m^j \boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{P}_j \qquad (2)$$

Mnożąc (1) przez $\frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k}$, odejmujemy od (2) i otrzymujemy przedstawienie $\boldsymbol{P}_j$ nowej bazie

Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie...

$$(y_1^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_1^k)\boldsymbol{B}_1 + \cdots + (y_{i*-1}^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_{i*-1}^k)\boldsymbol{B}_{i*-1} + (\mathbf{y}_{\mathbf{i}*}^{\mathbf{j}} - \frac{\mathbf{y}_{\mathbf{i}*}^{\mathbf{j}}}{\mathbf{y}_{\mathbf{i}*}^{\mathbf{k}}} \mathbf{y}_{\mathbf{i}*}^{\mathbf{k}})\boldsymbol{B}_{\mathbf{i}*} +$$

$$(y_{i*+1}^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_{i*+1}^k)\boldsymbol{B}_{i*+1} + \cdots + (y_m^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_m^k)\boldsymbol{B}_m + \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k}\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_j$$

Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie...

$$(y_1^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_1^k) \boldsymbol{B}_1 + \cdots + (y_{i*-1}^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_{i*-1}^k) \boldsymbol{B}_{i*-1} + (\mathbf{y_{i*}^j} - \frac{\mathbf{y_{i*}^j}}{\mathbf{y_{i*}^k}} \mathbf{y_{i*}^k}) \boldsymbol{B}_{\mathbf{i*}} +$$

$$(y_{i*+1}^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_{i*+1}^k) \boldsymbol{B}_{i*+1} + \cdots + (y_m^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_m^k) \boldsymbol{B}_m + \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_j$$

Współrzędne $\overline{\boldsymbol{y}}^j$ kolumny $\boldsymbol{P}_j$ w nowej bazie $\overline{\boldsymbol{B}}$ wyznaczamy ze wzoru

$$\overline{y}_i^j = \begin{cases} \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} & \text{dla } i = k \\ y_i^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_i^k & \text{dla } i \neq k \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Tablica sympleksowa

Rozważmy zadanie programowania liniowego i następnie przekształćmy je do postaci standardowej przez dodanie zmiennych uzupełniających s_1 i s_2.

$$
\begin{array}{ll}
-4x_1 - 5x_2 \to \min & -4x_1 - 5x_2 + 0s_1 + 0s_2 \to \min \\
x_1 + 2x_2 \leqslant 40 & x_1 + 2x_2 + s_1 = 40 \\
4x_1 + 3x_2 \leqslant 120 & 4x_1 + 3x_2 + s_2 = 120 \\
x_1, x_2 \geqslant 0 & x_1, x_2, s_1, s_2 \geqslant 0
\end{array}
$$

Tablica sympleksowa

Rozważmy zadanie programowania liniowego i następnie przekształćmy je do postaci standardowej przez dodanie zmiennych uzupełniających s_1 i s_2.

$$\begin{array}{ll} -4x_1 - 5x_2 \to \min & -4x_1 - 5x_2 + 0s_1 + 0s_2 \to \min \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 40 & x_1 + 2x_2 + s_1 = 40 \\ 4x_1 + 3x_2 \leqslant 120 & 4x_1 + 3x_2 + s_2 = 120 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 & x_1, x_2, s_1, s_2 \geqslant 0 \end{array}$$

Pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne jest postaci:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 40, s_2 = 120$$

Tablica sympleksowa

Rozważmy zadanie programowania liniowego i następnie przekształćmy je do postaci standardowej przez dodanie zmiennych uzupełniających s_1 i s_2.

$$\begin{array}{ll} -4x_1 - 5x_2 \to \min & -4x_1 - 5x_2 + 0s_1 + 0s_2 \to \min \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 40 & x_1 + 2x_2 + s_1 = 40 \\ 4x_1 + 3x_2 \leqslant 120 & 4x_1 + 3x_2 + s_2 = 120 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 & x_1, x_2, s_1, s_2 \geqslant 0 \end{array}$$

Pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne jest postaci:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 40, s_2 = 120$$

dla bazy początkowej

$$\boldsymbol{B} = \mathbf{I}$$

(kolumny trzecia i czwarta są kolumnami bazowymi).

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
0	$\mathbf{s_1}$	**40**	**1**	**2**	**1**	**0**
0	s_2	120	4	**3**	0	1
	z_j	0	0	**0**	0	0
	$c_j - z_j$		-4	**-5**	0	0

Tablica sympleksowa...

- wiersz 1 c_j - zawiera współczynniki funkcji celu, czyli -4,-5,0,0,

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
0	$\mathbf{s_1}$	**40**	**1**	**2**	**1**	**0**
0	s_2	120	4	**3**	0	1
	z_j	0	0	**0**	0	0
	$c_j - z_j$		-4	**-5**	0	0

Tablica sympleksowa...

- wiersz 1 c_j - zawiera współczynniki funkcji celu, czyli -4,-5,0,0,
- kolumna 1 - zawiera współczynniki funkcji celu odpowiadające zmiennym bazowym $\boldsymbol{c^B}$, czyli 0,0,

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
0	$\mathbf{s_1}$	**40**	**1**	**2**	**1**	**0**
0	s_2	120	4	**3**	0	1
	z_j	0	0	**0**	0	0
	$c_j - z_j$		-4	**-5**	0	0

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
0	$\mathbf{s_1}$	**40**	**1**	**2**	**1**	**0**
0	s_2	120	4	**3**	0	1
	z_j	0	0	**0**	0	0
	$c_j - z_j$		-4	**-5**	0	0

- wiersz 1 c_j - zawiera współczynniki funkcji celu, czyli -4,-5,0,0,
- kolumna 1 - zawiera współczynniki funkcji celu odpowiadające zmiennym bazowym $\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}}$, czyli 0,0,
- kolumna 2 - zawiera aktualne zmienne bazowe, czyli s_1 i s_2,

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
0	$\mathbf{s_1}$	**40**	**1**	**2**	**1**	**0**
0	s_2	120	4	**3**	0	1
	z_j	0	0	**0**	0	0
	$c_j - z_j$		-4	**-5**	0	0

- wiersz 1 c_j - zawiera współczynniki funkcji celu, czyli -4,-5,0,0,
- kolumna 1 - zawiera współczynniki funkcji celu odpowiadające zmiennym bazowym $\boldsymbol{c^B}$, czyli 0,0,
- kolumna 2 - zawiera aktualne zmienne bazowe, czyli s_1 i s_2,
- kolumna 3 - zawiera wartości zmiennych bazowych, czyli 40 i 120,

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
0	$\mathbf{s_1}$	**40**	**1**	**2**	**1**	**0**
0	s_2	120	4	**3**	0	1
	z_j	0	0	**0**	0	0
	$c_j - z_j$		-4	**-5**	0	0

- wiersz 1 c_j - zawiera współczynniki funkcji celu, czyli -4,-5,0,0,
- kolumna 1 - zawiera współczynniki funkcji celu odpowiadające zmiennym bazowym $\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}}$, czyli 0,0,
- kolumna 2 - zawiera aktualne zmienne bazowe, czyli s_1 i s_2,
- kolumna 3 - zawiera wartości zmiennych bazowych, czyli 40 i 120,
- kolumny 4,5,6,7- zawierają przedstawienia kolumn macierzy zadania programowania liniowego w aktualnej bazie $\boldsymbol{B}$, tzn. $\boldsymbol{y}^j$, $j = 1, \ldots, n$, gdzie $\boldsymbol{y}^j = \boldsymbol{B}^{-1} A_j$, w naszym przypadku $\boldsymbol{B} = \mathbf{I}$. $\boldsymbol{y}^j = A_j$,

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
0	$\mathbf{s_1}$	**40**	**1**	**2**	**1**	**0**
0	s_2	120	4	**3**	0	1
	z_j	0	0	**0**	0	0
	$c_j - z_j$		-4	**-5**	0	0

- wiersz 1 c_j - zawiera współczynniki funkcji celu, czyli -4,-5,0,0,
- kolumna 1 - zawiera współczynniki funkcji celu odpowiadające zmiennym bazowym $\boldsymbol{c^B}$, czyli 0,0,
- kolumna 2 - zawiera aktualne zmienne bazowe, czyli s_1 i s_2,
- kolumna 3 - zawiera wartości zmiennych bazowych, czyli 40 i 120,
- kolumny 4,5,6,7- zawierają przedstawienia kolumn macierzy zadania programowania liniowego w aktualnej bazie $\boldsymbol{B}$, tzn. $\boldsymbol{y}^j$, $j = 1, \ldots, n$, gdzie $\boldsymbol{y}^j = \boldsymbol{B}^{-1} A_j$, w naszym przypadku $\boldsymbol{B} = \mathbf{I}$. $\boldsymbol{y}^j = A_j$,
- wiersz 6 z_j - zawiera wielkości potrzebne do obliczenia wskaźników optymalności rozwiązania $z_j = (\boldsymbol{c^B})^T \boldsymbol{y}^j$,

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
0	$\mathbf{s_1}$	**40**	**1**	**2**	**1**	**0**
0	s_2	120	4	**3**	0	1
	z_j	0	0	**0**	0	0
	$c_j - z_j$		-4	**-5**	0	0

- wiersz 1 c_j - zawiera współczynniki funkcji celu, czyli -4,-5,0,0,
- kolumna 1 - zawiera współczynniki funkcji celu odpowiadające zmiennym bazowym $\boldsymbol{c^B}$, czyli 0,0,
- kolumna 2 - zawiera aktualne zmienne bazowe, czyli s_1 i s_2,
- kolumna 3 - zawiera wartości zmiennych bazowych, czyli 40 i 120,
- kolumny 4,5,6,7- zawierają przedstawienia kolumn macierzy zadania programowania liniowego w aktualnej bazie $\boldsymbol{B}$, tzn. $\boldsymbol{y}^j$, $j = 1, \ldots, n$, gdzie $\boldsymbol{y}^j = \boldsymbol{B}^{-1} A_j$, w naszym przypadku $\boldsymbol{B} = \mathbf{I}$. $\boldsymbol{y}^j = A_j$,
- wiersz 6 z_j - zawiera wielkości potrzebne do obliczenia wskaźników optymalności rozwiązania $z_j = (\boldsymbol{c^B})^T \boldsymbol{y}^j$,
- wiersz 7 - zawiera zawiera wskaźniki optymalności $c_j - z_j$.

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
0	$\mathbf{s_1}$	**40**	**1**	**2**	**1**	**0**
0	s_2	120	4	**3**	0	1
	z_j	0	0	**0**	0	0
	$c_j - z_j$		-4	**-5**	0	0

Tablica sympleksowa...

c_j	zm. baz.	wartości zm. baz.	-4	-5	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2
0	$\mathbf{s_1}$	**40**	**1**	**2**	**1**	**0**
0	s_2	120	4	**3**	0	1
	z_j	0	0	**0**	0	0
	$c_j - z_j$		-4	**-5**	0	0

- Tablica pozwala:

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
0	$\mathbf{s_1}$	**40**	**1**	**2**	**1**	**0**
0	s_2	120	4	**3**	0	1
	z_j	0	0	**0**	0	0
	$c_j - z_j$		-4	**-5**	0	0

- Tablica pozwala:
  - stwierdzić optymalność rozwiązania (jego jednoznaczność),

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
0	$\mathbf{s_1}$	**40**	**1**	**2**	**1**	**0**
0	s_2	120	4	**3**	0	1
	z_j	0	0	**0**	0	0
	$c_j - z_j$		-4	**-5**	0	0

- Tablica pozwala:
  - stwierdzić optymalność rozwiązania (jego jednoznaczność),
  - skonstruować sąsiednie rozwiązanie bazowe dopuszczalne,

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
0	$\mathbf{s_1}$	**40**	**1**	**2**	**1**	**0**
0	s_2	120	4	**3**	0	1
	z_j	0	0	**0**	0	0
	$c_j - z_j$		-4	**-5**	0	0

- Tablica pozwala:
  - stwierdzić optymalność rozwiązania (jego jednoznaczność),
  - skonstruować sąsiednie rozwiązanie bazowe dopuszczalne,
  - czy wartości funkcji celu są nieograniczone z dołu.

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
0	$\mathbf{s_1}$	**40**	**1**	**2**	**1**	**0**
0	s_2	120	4	**3**	0	1
	z_j	0	0	**0**	0	0
	$c_j - z_j$		-4	**-5**	0	0

- Tablica pozwala:
  - stwierdzić optymalność rozwiązania (jego jednoznaczność),
  - skonstruować sąsiednie rozwiązanie bazowe dopuszczalne,
  - czy wartości funkcji celu są nieograniczone z dołu.
- Aktualne rozwiązanie bazowe jest nieoptymalne (istnieją ujemne wskaźniki optymalności $c_j - z_j$).

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
0	$\mathbf{s_1}$	**40**	**1**	**2**	**1**	**0**
0	s_2	120	4	**3**	0	1
	z_j	0	0	**0**	0	0
	$c_j - z_j$		-4	**-5**	0	0

- Tablica pozwala:
  - stwierdzić optymalność rozwiązania (jego jednoznaczność),
  - skonstruować sąsiednie rozwiązanie bazowe dopuszczalne,
  - czy wartości funkcji celu są nieograniczone z dołu.
- Aktualne rozwiązanie bazowe jest nieoptymalne (istnieją ujemne wskaźniki optymalności $c_j - z_j$).
- s_1 wychodzi z bazy a x_2 wchodzi do bazy - stosujemy kryterium wejścia i wyjścia.

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
-5	x_2	20	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	s_2	**60**	$\frac{5}{2}$	**0**	$\frac{-3}{2}$	**1**
	z_j	-100	$\frac{-5}{2}$	-5	$\frac{-5}{2}$	0
	$c_j - z_j$		$\frac{-3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
-5	x_2	20	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	s_2	**60**	$\frac{5}{2}$	**0**	$\frac{-3}{2}$	**1**
	z_j	-100	$\frac{-5}{2}$	-5	$\frac{-5}{2}$	0
	$c_j - z_j$		$\frac{-3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0

- Aktualne rozwiązanie bazowe jest nieoptymalne (istnieją ujemne wskaźniki optymalności $c_j - z_j$).

Tablica sympleksowa...

c_j	zm. baz.	wartości zm. baz.	-4	-5	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2
-5	x_2	20	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	$\mathbf{s_2}$	**60**	$\mathbf{\frac{5}{2}}$	**0**	$\mathbf{\frac{-3}{2}}$	**1**
	z_j	-100	$\frac{-5}{2}$	-5	$\frac{-5}{2}$	0
	$c_j - z_j$		$\frac{-3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0

- Aktualne rozwiązanie bazowe jest nieoptymalne (istnieją ujemne wskaźniki optymalności $c_j - z_j$).
- s_2 wychodzi z bazy a x_1 wchodzi do bazy.

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
-5	x_2	8	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-1}{5}$
-4	x_1	24	1	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{2}{5}$
	z_j	-136	-4	-5	$\frac{-8}{5}$	$\frac{-3}{5}$
	$c_j - z_j$		0	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{5}$

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
-5	x_2	8	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-1}{5}$
-4	x_1	24	1	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{2}{5}$
	z_j	-136	-4	-5	$\frac{-8}{5}$	$\frac{-3}{5}$
	$c_j - z_j$		0	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{5}$

- Rozwiązanie bazowe jest optymalne, tzn. wszystkie wskaźniki optymalności $c_j - z_j$ są nieujemne.

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
-5	x_2	8	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-1}{5}$
-4	x_1	24	1	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{2}{5}$
	z_j	-136	-4	-5	$\frac{-8}{5}$	$\frac{-3}{5}$
	$c_j - z_j$		0	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{5}$

- Rozwiązanie bazowe jest optymalne, tzn. wszystkie wskaźniki optymalności $c_j - z_j$ są nieujemne.
- Rozwiązanie jest optymalne jest jednoznaczne.

Tablica sympleksowa...

c_j			-4	-5	0	0
	zm. baz.	wartości zm. baz.	x_1	x_2	s_1	s_2
-5	x_2	8	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-1}{5}$
-4	x_1	24	1	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{2}{5}$
	z_j	-136	-4	-5	$\frac{-8}{5}$	$\frac{-3}{5}$
	$c_j - z_j$		0	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{5}$

- Rozwiązanie bazowe jest optymalne, tzn. wszystkie wskaźniki optymalności $c_j - z_j$ są nieujemne.
- Rozwiązanie jest optymalne jest jednoznaczne.
- Optymalna wartość funkcji celu wynosi -136.

Metoda dwóch faz - wyznaczanie pierwszego rozwiązania bazowego dopuszczalnego

$$\mathbb{X} = \begin{cases} \min\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{3}$$

Metoda dwóch faz - wyznaczanie pierwszego rozwiązania bazowego dopuszczalnego

$$\mathbb{X} = \begin{cases} \min \ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{3}$$

Metoda składa się z dwóch etapów:

Metoda dwóch faz - wyznaczanie pierwszego rozwiązania bazowego dopuszczalnego

$$\mathbb{X} = \begin{cases} \min \ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{3}$$

Metoda składa się z dwóch etapów:

Faza I faza, w której wyznaczamy pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ ($\mathbb{X} \neq \emptyset$) lub stwierdzamy, że $\mathbb{X} = \emptyset$,

Metoda dwóch faz - wyznaczanie pierwszego rozwiązania bazowego dopuszczalnego

$$\mathbb{X} = \begin{cases} \min \ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{3}$$

Metoda składa się z dwóch etapów:

Faza I faza, w której wyznaczamy pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ ($\mathbb{X} \neq \emptyset$) lub stwierdzamy, że $\mathbb{X} = \emptyset$,

Faza II faza, w której wyznaczone rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ jest początkowym rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym dla algorytmu sympleks.

Metoda dwóch faz...

FAZA I

Rozwiązujemy za pomocą algorytmu sympleks następujące zadanie LP

$$\min \sum_{i\in[m]} x_i^A$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{Ax} + \mathrm{I}\,\boldsymbol{x}^A = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}^A \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{4}$$

Metoda dwóch faz...

Faza I

Rozwiązujemy za pomocą algorytmu sympleks następujące zadanie LP

$$\min \sum_{i\in[m]} x_i^A$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{I}\,\boldsymbol{x}^A = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}^A \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \tag{4}$$

gdzie $\boldsymbol{x}^A \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem sztucznych zmiennych.

Metoda dwóch faz...

FAZA I

Rozwiązujemy za pomocą algorytmu sympleks następujące zadanie LP

$$\min \sum_{i\in[m]} x_i^A$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{Ax} + \mathbf{I}\,\boldsymbol{x}^A = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}^A \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \tag{4}$$

gdzie $\boldsymbol{x}^A \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem sztucznych zmiennych. W tym przypadku

Metoda dwóch faz...

FAZA I

Rozwiązujemy za pomocą algorytmu sympleks następujące zadanie LP

$$\min \sum_{i\in[m]} x_i^A$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{Ax} + \mathbf{I}\,\boldsymbol{x}^A = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}^A \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \tag{4}$$

gdzie $\boldsymbol{x}^A \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem sztucznych zmiennych. W tym przypadku

- $\boldsymbol{B} = \mathbf{I}$ jest bazą początkową,

Metoda dwóch faz...

Faza I

Rozwiązujemy za pomocą algorytmu sympleks następujące zadanie LP

$$\min \sum_{i\in[m]} x_i^A$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{I}\,\boldsymbol{x}^A = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}^A \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \tag{4}$$

gdzie $\boldsymbol{x}^A \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem sztucznych zmiennych. W tym przypadku

- $\boldsymbol{B} = \mathbf{I}$ jest bazą początkową,
- $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^A]^T, \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^A = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \geqslant \mathbf{0}$, jest pierwszym rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym.

Metoda dwóch faz...

Niech $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^A]^T$ będzie rozwiązanie optymalnym problemu (4).

Metoda dwóch faz...

Niech $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^A]^T$ będzie rozwiązanie optymalnym problemu (4). Rozważmy trzy przypadki:

Metoda dwóch faz...

Niech $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^A]^T$ będzie rozwiązanie optymalnym problemu (4). Rozważmy trzy przypadki:

- $\sum_{i \in [m]} x_i^A > 0$. Zatem istnieje co najmniej jedna sztuczna zmienna o wartości dodatniej. Stąd $\mathbb{X} = \emptyset$ - przerywamy obliczenia!

Metoda dwóch faz...

Niech $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^A]^T$ będzie rozwiązanie optymalnym problemu (4).
Rozważmy trzy przypadki:

- $\sum_{i\in[m]} x_i^A > 0$. Zatem istnieje co najmniej jedna sztuczna zmienna o wartości dodatniej. Stąd $\mathbb{X} = \emptyset$ - przerywamy obliczenia!
- $\sum_{i\in[m]} x_i^A = 0$ i żadna ze zmiennych sztucznych x_i^A, $i = 1, \ldots, m$ nie jest zmienną bazową.
  Wówczas przechodzimy do FAZY II i $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ jest pierwszym rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym problemu (3).

Metoda dwóch faz...

- $\sum_{i \in [m]} x_i^A = 0$ (wszystkie zmienne sztuczne mają wartość zero), ale istnieje co najmniej jedna sztuczna zmienna, która jest zmienną bazową, oznaczmy ją przez $x_{i^*}^A$. Oczywiście $x_{i^*}^A = 0$.

Metoda dwóch faz...

- $\sum_{i\in[m]} x_i^A = 0$ (wszystkie zmienne sztuczne mają wartość zero), ale istnieje co najmniej jedna sztuczna zmienna, która jest zmienną bazową, oznaczmy ją przez x_{i*}^A. Oczywiście $x_{i*}^A = 0$.
  - Wprowadźmy oryginalną zmienną niebazową x_k ($x_k = 0$), dla której $y_{i*}^k \neq 0$ (niekoniecznie $y_{i*}^k > 0$).

Metoda dwóch faz...

- $\sum_{i \in [m]} x_i^A = 0$ (wszystkie zmienne sztuczne mają wartość zero), ale istnieje co najmniej jedna sztuczna zmienna, która jest zmienną bazową, oznaczmy ją przez x_{i*}^A. Oczywiście $x_{i*}^A = 0$.
  - Wprowadźmy oryginalną zmienną niebazową x_k ($x_k = 0$), dla której $y_{i*}^k \neq 0$ (niekoniecznie $y_{i*}^k > 0$).
    Wtedy $\overline{\Theta}_k = 0$. Wartość funkcji celu się nie zmieni.

Metoda dwóch faz...

- $\sum_{i\in[m]} x_i^A = 0$ (wszystkie zmienne sztuczne mają wartość zero), ale istnieje co najmniej jedna sztuczna zmienna, która jest zmienną bazową, oznaczmy ją przez $x_{i^*}^A$. Oczywiście $x_{i^*}^A = 0$.
  - Wprowadźmy oryginalną zmienną niebazową x_k ($x_k = 0$), dla której $y_{i^*}^k \neq 0$ (niekoniecznie $y_{i^*}^k > 0$).
    Wtedy $\overline{\Theta}_k = 0$. Wartość funkcji celu się nie zmieni.
    Otrzymane rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ będzie rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, ale zdegenerowanym.

Metoda dwóch faz...

- $\sum_{i \in [m]} x_i^A = 0$ (wszystkie zmienne sztuczne mają wartość zero), ale istnieje co najmniej jedna sztuczna zmienna, która jest zmienną bazową, oznaczmy ją przez $x_{i^*}^A$. Oczywiście $x_{i^*}^A = 0$.
  - Wprowadźmy oryginalną zmienną niebazową x_k ($x_k = 0$), dla której $y_{i^*}^k \neq 0$ (niekoniecznie $y_{i^*}^k > 0$).
    Wtedy $\overline{\Theta}_k = 0$. Wartość funkcji celu się nie zmieni.
    Otrzymane rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ będzie rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, ale zdegenerowanym.
  - Proces ten powtarzamy aż wszystkie zmienne sztuczne nie będą zmiennymi bazowymi.

Powyższy proces "wypychania" zmiennej sztucznej $x_{i^*}^A$ nie powiedzie się tylko, jeśli $y_{i^*}^k = 0$ dla wszystkich kolumn odpowiadających zmiennym niesztucznym.

Metoda dwóch faz...

- $\sum_{i\in[m]} x_i^A = 0$ (wszystkie zmienne sztuczne mają wartość zero), ale istnieje co najmniej jedna sztuczna zmienna, która jest zmienną bazową, oznaczmy ją przez x_{i*}^A. Oczywiście $x_{i*}^A = 0$.
  - Wprowadźmy oryginalną zmienną niebazową x_k ($x_k = 0$), dla której $y_{i*}^k \neq 0$ (niekoniecznie $y_{i*}^k > 0$).
    Wtedy $\overline{\Theta}_k = 0$. Wartość funkcji celu się nie zmieni.
    Otrzymane rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ będzie rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, ale zdegenerowanym.
  - Proces ten powtarzamy aż wszystkie zmienne sztuczne nie będą zmiennymi bazowymi.

Powyższy proces "wypychania" zmiennej sztucznej x_{i*}^A nie powiedzie się tylko, jeśli $y_{i*}^k = 0$ dla wszystkich kolumn odpowiadających zmiennym niesztucznym. Co świadczy o tym, że $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) < m$ (istnieją przekształcenia elementarne zerujące wiersz i^* w oryginalnej macierzy $\boldsymbol{A}$).

Metoda dwóch faz...

- $\sum_{i\in[m]} x_i^A = 0$ (wszystkie zmienne sztuczne mają wartość zero), ale istnieje co najmniej jedna sztuczna zmienna, która jest zmienną bazową, oznaczmy ją przez $x_{i^*}^A$. Oczywiście $x_{i^*}^A = 0$.
  - Wprowadźmy oryginalną zmienną niebazową x_k ($x_k = 0$), dla której $y_{i^*}^k \neq 0$ (niekoniecznie $y_{i^*}^k > 0$).
    Wtedy $\overline{\Theta}_k = 0$. Wartość funkcji celu się nie zmieni.
    Otrzymane rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ będzie rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, ale zdegenerowanym.
  - Proces ten powtarzamy aż wszystkie zmienne sztuczne nie będą zmiennymi bazowymi.

  Powyższy proces "wypychania" zmiennej sztucznej $x_{i^*}^A$ nie powiedzie się tylko, jeśli $y_{i^*}^k = 0$ dla wszystkich kolumn odpowiadających zmiennym niesztucznym. Co świadczy o tym, że $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) < m$ (istnieją przekształcenia elementarne zerujące wiersz i^* w oryginalnej macierzy $\boldsymbol{A}$). Zatem usuwamy i^*-ty wiersz z macierzy $\boldsymbol{A}$ i zmienną x^A

Metoda dwóch faz...

FAZA II

Uruchamiamy algorytm sympleks dla problemu (3) z wyznaczonym w fazie I rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ (rozwiązanie może być zdegenerowane).

Degeneracja rozwiązania

Przyczyny degeneracji rozwiązania są, między innymi, następujące:

Degeneracja rozwiązania

Przyczyny degeneracji rozwiązania są, między innymi, następujące:

- Istnienie składowych zerowych w wektorze $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{Ax} + \mathbf{I}\,\boldsymbol{x}^A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant 0$$
$$\boldsymbol{x}^A \geqslant 0$$

Wówczas część składowych wektora sztucznych zmiennych $\boldsymbol{x}^A$ jest zerowa. Zatem w metodzie dwóch faz (Faza I) pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne jest zdegenerowane.

Degeneracja rozwiązania

Przyczyny degeneracji rozwiązania są, między innymi, następujące:

- Istnienie składowych zerowych w wektorze $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{Ax} + \mathbf{I}\,\boldsymbol{x}^A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{x}^A \geqslant \mathbf{0}$$

  Wówczas część składowych wektora sztucznych zmiennych $\boldsymbol{x}^A$ jest zerowa. Zatem w metodzie dwóch faz (FAZA I) pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne jest zdegenerowane.

- Występowanie składowych sztucznych w rozwiązaniu bazowym w metodzie dwóch faz (FAZA II). Wtedy po wymianie składowych sztucznych z oryginalnymi składowymi wektora $\boldsymbol{x}$, w FAZA II pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne jest zdegenerowane.

Degeneracja rozwiązania...

- Brak jednoznaczności w kryterium wyjścia z bazy powoduje pojawienie się zerowych wartości w nowym rozwiązaniu bazowym dopuszczalnym (więcej niż jedna składowa się zeruje).

Degeneracja rozwiązania...

- Brak jednoznaczności w kryterium wyjścia z bazy powoduje pojawienie się zerowych wartości w nowym rozwiązaniu bazowym dopuszczalnym (więcej niż jedna składowa się zeruje).

Głównym zagrożeniem wynikającym z degeneracji rozwiązania bazowego dopuszczalnego jest możliwość wpadnięcia cykl.

Degeneracja rozwiązania...

- Brak jednoznaczności w kryterium wyjścia z bazy powoduje pojawienie się zerowych wartości w nowym rozwiązaniu bazowym dopuszczalnym (więcej niż jedna składowa się zeruje).

Głównym zagrożeniem wynikającym z degeneracji rozwiązania bazowego dopuszczalnego jest możliwość wpadnięcia cykl.

Twierdzenie

Jeśli rozwiązanie bazowe dopuszczalne odpowiada dwóm różnym macierzom bazowym, to rozwiązanie jest zdegenerowane.

Degeneracja rozwiązania...

Twierdzenie (O skończonej liczbie kroków)

Załóżmy, że $\mathbf{P}_k$ *będzie kolumną wchodzącą do bazy wybraną następująco:*

$$k = \min\{j \,:\, c_j - z_j < 0, m+1 \leqslant j \leqslant n\}$$

oraz w przypadku pojawienia się niejednoznaczności przy zastosowaniu kryterium wyjścia, przyjmiemy jako indeks zmiennej usuwanej z bazy indeks i^* *będący indeksem o najmniejszej wartości spośród indeksów wyznaczających minimalną wartość ilorazu,*

$$\frac{x^{\mathbf{B}}_{i^*}}{y^k_{i^*}} = \min\left\{\frac{x^{\mathbf{B}}_i}{y^k_i} \,:\, y^k_i > 0, 1 \leqslant i \leqslant m\right\}.$$

Wówczas algorytm sympleks skończy działanie w skończonej liczbie kroków.

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książek

- Ireneusz Nykowski.
  Programowanie liniowe.
  PWE, Warszawa, 1980.
- Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz.
  Combinatorial optimization: algorithms and complexity.
  Dover Publications Inc., 1998.