Metody optymalizacji
Wykład nr 6

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska

Dualność w programowaniu liniowym

Rozważmy zagadnienie prymalne w postaci kanonicznej:

$$\min \; \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$
$$\mathbb{X}_P = \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ i $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem n nieujemnych zmiennych decyzyjnych prymalnych.

Dualność w programowaniu liniowym

Rozważmy zagadnienie prymalne w postaci kanonicznej:

$$\min \ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$
$$\mathbb{X}_P = \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ i $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem n nieujemnych zmiennych decyzyjnych prymalnych.

Zagadnienie dualne do zagadnienia prymalnego (1) jest następującej postaci:

$$\max \ \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\pi} \qquad\qquad \max \ \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\pi}$$
$$\mathbb{X}_D = \begin{cases} \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{\pi} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{X}_D = \begin{cases} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\pi} \leqslant \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{\pi} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem m nieujemnych zmiennych decyzyjnych dualnych.

Dualność w programowaniu liniowym...

W przypadku zagadnienia prymalnego w postaci standardowej

$$\mathbb{X}_P = \begin{cases} \min \ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{3}$$

Dualność w programowaniu liniowym...

W przypadku zagadnienia prymalnego w postaci standardowej

$$\mathbb{X}_P = \begin{cases} \min \ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{3}$$

zagadnienia dualne jest postaci:

$$\mathbb{X}_D = \begin{cases} \max \ \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m \end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{X}_D = \begin{cases} \max \ \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\pi} \leqslant \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{4}$$

gdzie $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem m zmiennych decyzyjnych dualnych nieograniczonych co do znaku.

Dualność w programowaniu liniowym...

- Zmienna dualna π_i odpowiada i-temu ograniczeniu z zagadnieniu prymalnym, $i \in [m]$.

Dualność w programowaniu liniowym...

- Zmienna dualna π_i odpowiada i-temu ograniczeniu z zagadnieniu prymalnym, $i \in [m]$.
- Zmienna prymalna x_j odpowiada j-temu ograniczeniu w zagadnieniu dualnym, $j \in [n]$.

Dualność w programowaniu liniowym...

- Zmienna dualna π_i odpowiada i-temu ograniczeniu z zagadnieniu prymalnym, $i \in [m]$.
- Zmienna prymalna x_j odpowiada j-temu ograniczeniu w zagadnieniu dualnym, $j \in [n]$.

Zależności między zadaniami prymalnym i dualnym, gdzie $\boldsymbol{a}_i^T$ i $\boldsymbol{A}_j$ są odpowiednio i-tym wierszem i j-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$ i $|M_=| + |M_\geqslant| = m$ i $|N_\geqslant| + |N_\mathbb{R}| = n$.

Dualność w programowaniu liniowym...

- Zmienna dualna π_i odpowiada i-temu ograniczeniu z zagadnieniu prymalnym, $i \in [m]$.
- Zmienna prymalna x_j odpowiada j-temu ograniczeniu w zagadnieniu dualnym, $j \in [n]$.

Zależności między zadaniami prymalnym i dualnym, gdzie $\boldsymbol{a}_i^T$ i $\boldsymbol{A}_j$ są odpowiednio i-tym wierszem i j-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$ i $|M_=| + |M_\geqslant| = m$ i $|N_\geqslant| + |N_\mathbb{R}| = n$.

Prymalne		Dualne
$\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$		$\max \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi}$
$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} = b_i$	$i \in M_=$	$\pi_i \in \mathbb{R}$
$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \geqslant b_i$	$i \in M_\geqslant$	$\pi_i \geqslant 0$
$x_j \geqslant 0$	$j \in N_\geqslant$	$\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}_j \leqslant c_j$
$x_j \in \mathbb{R}$	$j \in N_\mathbb{R}$	$\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}_j = c_j$

Dualność w programowaniu liniowym...

Zadanie prymalne:

$$\begin{aligned} \min\ & 40x_1 + 216x_2 + 240x_3 \\ & 2x_1 + 18x_2 + 24x_3 \geqslant 160 \quad (\pi_1 \geqslant 0) \\ & 4x_1 + 18x_2 + 12x_3 \geqslant 200 \quad (\pi_2 \geqslant 0) \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Dualność w programowaniu liniowym...

Zadanie prymalne:

$$\begin{aligned} \min\ & 40x_1 + 216x_2 + 240x_3 \\ & 2x_1 + 18x_2 + 24x_3 \geqslant 160 \quad (\pi_1 \geqslant 0) \\ & 4x_1 + 18x_2 + 12x_3 \geqslant 200 \quad (\pi_2 \geqslant 0) \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Zadanie dualne:

$$\begin{aligned} \max\ & 160\pi_1 + 200\pi_2 \\ & 2\pi_1 + 4\pi_2 \leqslant 40 \quad (x_1 \geqslant 0) \\ & 18\pi_1 + 18\pi_2 \leqslant 216 \quad (x_2 \geqslant 0) \\ & 24\pi_1 + 12\pi_2 \leqslant 240 \quad (x_3 \geqslant 0) \\ & \pi_1 \geqslant 0, \pi_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Dualność w programowaniu liniowym...

Zadanie prymalne:

$$
\begin{aligned}
\min\ & 10x_1 + 4x_2 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geqslant 0 && (\pi_1 \geqslant 0) \\
& 2x_1 + 1x_2 = 3 && (\pi_2 \in \mathbb{R}) \\
& 1x_1 + 12x_2 \geqslant 1 && (\pi_3 \geqslant 0) \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Dualność w programowaniu liniowym...

Zadanie prymalne:

$$
\begin{aligned}
\min\ & 10x_1 + 4x_2 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geqslant 0 && (\pi_1 \geqslant 0) \\
& 2x_1 + 1x_2 = 3 && (\pi_2 \in \mathbb{R}) \\
& 1x_1 + 12x_2 \geqslant 1 && (\pi_3 \geqslant 0) \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Zadanie dualne:

$$
\begin{aligned}
\max\ & 0\pi_1 + 3\pi_2 + 1\pi_3 \\
& 2\pi_1 + 2\pi_2 + 1\pi_3 \leqslant 10 && (x_1 \geqslant 0) \\
& 3\pi_1 + 1\pi_2 + 12\pi_3 = 4 && (x_2 \in \mathbb{R}) \\
& \pi_1 \geqslant 0, \pi_2 \in \mathbb{R}, \pi_3 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Dualność w programowaniu liniowym...

Bez straty ogólności przyjmijmy, następujące założenie.

Założenie

Zadanie prymalne jest problemem minimalizacyjnym (oczywiście wtedy dualne jest problemem maksymalizacyjnym).

Dualność w programowaniu liniowym...

Bez straty ogólności przyjmijmy, następujące założenie.

Założenie

Zadanie prymalne jest problemem minimalizacyjnym (oczywiście wtedy dualne jest problemem maksymalizacyjnym).

Twierdzenie

Zadanie dualne do dualnego jest zdaniem prymalnym.

Dowód.

Oczywisty. $\square$

Dualność w programowaniu liniowym...

Twierdzenie (Słabe twierdzenie o dualności)

Jeśli zbiory rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}_P$ i $\mathbb{X}_D$, odpowiednio, zadania prymalnego i dualnego są niepuste, to dla dowolnych rozwiązań dopuszczalnych $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P$ i $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D$ zachodzi nierówność

$$\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\pi} \leqslant \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}. \tag{5}$$

Słabe twierdzenie o dualności...

Dowód.

Podamy dowód dla postaci kanonicznej (wszystkie inne postaci są równoważne).

Słabe twierdzenie o dualności...

Dowód.

Podamy dowód dla postaci kanonicznej (wszystkie inne postaci są równoważne).
Z założenia wiemy, że $\mathbb{X}_P \neq \emptyset$ i $\mathbb{X}_D \neq \emptyset$.

Słabe twierdzenie o dualności...

Dowód.

Podamy dowód dla postaci kanonicznej (wszystkie inne postaci są równoważne).
Z założenia wiemy, że $\mathbb{X}_P \neq \emptyset$ i $\mathbb{X}_D \neq \emptyset$.
Zatem

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) \text{ i } (\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T \wedge \boldsymbol{\pi} \geqslant \boldsymbol{0}).$$

Słabe twierdzenie o dualności...

Dowód.

Podamy dowód dla postaci kanonicznej (wszystkie inne postaci są równoważne).
Z założenia wiemy, że $\mathbb{X}_P \neq \emptyset$ i $\mathbb{X}_D \neq \emptyset$.
Zatem

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\boldsymbol{Ax} \geqslant \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) \text{ i } (\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T \wedge \boldsymbol{\pi} \geqslant \boldsymbol{0}).$$

Stąd mnożąc obustronnie powyższe nierówności przez $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\pi}$ otrzymujemy:

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{Ax} \geqslant \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}),$$

Słabe twierdzenie o dualności...

Dowód.

Podamy dowód dla postaci kanonicznej (wszystkie inne postaci są równoważne).
Z założenia wiemy, że $\mathbb{X}_P \neq \emptyset$ i $\mathbb{X}_D \neq \emptyset$.
Zatem

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) \text{ i } (\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T \wedge \boldsymbol{\pi} \geqslant \boldsymbol{0}).$$

Stąd mnożąc obustronnie powyższe nierówności przez $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\pi}$ otrzymujemy:

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}),$$
$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}),$$

Słabe twierdzenie o dualności...

Dowód.

Podamy dowód dla postaci kanonicznej (wszystkie inne postaci są równoważne).

Z założenia wiemy, że $\mathbb{X}_P \neq \emptyset$ i $\mathbb{X}_D \neq \emptyset$.

Zatem

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\boldsymbol{Ax} \geqslant \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) \text{ i } (\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T \wedge \boldsymbol{\pi} \geqslant \boldsymbol{0}).$$

Stąd mnożąc obustronnie powyższe nierówności przez $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\pi}$ otrzymujemy:

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{Ax} \geqslant \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}),$$
$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}),$$
$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}). \quad \square$$

Słabe twierdzenie o dualności...

Wniosek (Równość wartości funkcji celu)

Jeżeli $\mathbf{x}'$ *jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania prymalnego i* π' *jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego i*

$$\mathbf{b}^T \pi' = \mathbf{c}^T \mathbf{x}', \tag{6}$$

wówczas $\mathbf{x}'$ *i* π' *są rozwiązaniami optymalnymi, odpowiednio, zadania prymalnego i dualnego.*

Słabe twierdzenie o dualności...

Dowód.

Ze słabego twierdzenia o dualności mamy:

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}^T \pi').$$

$\square$

Słabe twierdzenie o dualności...

Dowód.

Ze słabego twierdzenia o dualności mamy:

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}^T \pi').$$

Z założenia (6) wiemy, że $\boldsymbol{b}^T \pi' = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}'$. Stąd

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}').$$

$\square$

Słabe twierdzenie o dualności...

Dowód.

Ze słabego twierdzenia o dualności mamy:

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}^T \pi').$$

Z założenia (6) wiemy, że $\boldsymbol{b}^T \pi' = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}'$. Stąd

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}').$$

Zatem $\boldsymbol{x}'$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania prymalnego.

$\square$

Słabe twierdzenie o dualności...

Dowód.

Ze słabego twierdzenia o dualności mamy:

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}^T \pi').$$

Z założenia (6) wiemy, że $\boldsymbol{b}^T \pi' = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}'$. Stąd

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}').$$

Zatem $\boldsymbol{x}'$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania prymalnego. Podobnie dowodzimy, że π' jest rozwiązaniem optymalnym zadania dualnego. $\square$

Słabe twierdzenie o dualności...

Wniosek (nieograniczne→sprzeczne)

Jeżeli zadanie dualne jest nieograniczone, to zadanie prymalne jest sprzeczne.

Dowód.

□

Słabe twierdzenie o dualności...

Wniosek (nieograniczne→sprzeczne)

Jeżeli zadanie dualne jest nieograniczone, to zadanie prymalne jest sprzeczne.

Dowód.

Załóżmy nie wprost, że istnieje rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}'$ zadania prymalnego.

$\square$

Słabe twierdzenie o dualności...

Wniosek (nieograniczne→sprzeczne)

Jeżeli zadanie dualne jest nieograniczone, to zadanie prymalne jest sprzeczne.

Dowód.

Załóżmy nie wprost, że istnieje rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}'$ zadania prymalnego.
Ze słabego twierdzenia o dualności mamy:

$$(\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\pi} \leqslant \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}').$$

$\square$

Słabe twierdzenie o dualności...

Wniosek (nieograniczne→sprzeczne)

Jeżeli zadanie dualne jest nieograniczone, to zadanie prymalne jest sprzeczne.

Dowód.

Załóżmy nie wprost, że istnieje rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}'$ zadania prymalnego.
Ze słabego twierdzenia o dualności mamy:

$$(\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\pi} \leqslant \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}').$$

Sprzeczność z faktem, że zadanie dualne jest nieograniczone. $\square$

Słabe twierdzenie o dualności...

Wniosek (nieograniczne→sprzeczne)

Jeżeli zadanie dualne jest nieograniczone, to zadanie prymalne jest sprzeczne.

Dowód.

Załóżmy nie wprost, że istnieje rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}'$ zadania prymalnego.
Ze słabego twierdzenia o dualności mamy:

$$(\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\pi} \leqslant \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}').$$

Sprzeczność z faktem, że zadanie dualne jest nieograniczone. $\square$

Wniosek (nieograniczne→sprzeczne)

Jeżeli zadanie prymalne jest nieograniczone, to dualne jest sprzeczne.

Silne twierdzenie o dualności

Twierdzenie (Silne twierdzenie o dualności)

Jeżeli jedno zadań, prymalne lub dualne, ma skończone rozwiązanie optymalne, to drugie też ma skończone rozwiązanie optymalne i wartość funkcji celu są równe, tj.

$$\max_{\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D} \boldsymbol{b}^T \pi = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}. \tag{7}$$

Silne twierdzenie o dualności...

Dowód.

Załóżmy, że zadanie prymalne ma skończone rozwiązanie optymalne (dla zadania dualnego dowód jest podobny).

Silne twierdzenie o dualności...

Dowód.

Załóżmy, że zadanie prymalne ma skończone rozwiązanie optymalne (dla zadania dualnego dowód jest podobny).
Stąd istnieje optymalne rozwiązanie bazowe dopuszczalne $\boldsymbol{x}$, tj.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}}]^T,$$

gdzie $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0}$, a podmacierz $\boldsymbol{B}$ jest bazą.

Silne twierdzenie o dualności...

Dowód.

Załóżmy, że zadanie prymalne ma skończone rozwiązanie optymalne (dla zadania dualnego dowód jest podobny).
Stąd istnieje optymalne rozwiązanie bazowe dopuszczalne $\boldsymbol{x}$, tj.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}}]^T,$$

gdzie $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0}$, a podmacierz $\boldsymbol{B}$ jest bazą.
$\boldsymbol{x}$ spełnia warunek optymalności

$$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0},$$

gdzie $\boldsymbol{c}^T = [c_1, \ldots, c_n]$, $\boldsymbol{z} = [z_1, \ldots, z_n]^T$, $z_k = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^k = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_k$, a $\boldsymbol{A}_k$ jest k-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$, $k \in [n]$.

Silne twierdzenie o dualności...

Zatem

Silne twierdzenie o dualności...

Zatem

$$\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{z}^T \geqslant \mathbf{0}^T,$$

Silne twierdzenie o dualności...

Zatem

$$\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{z}^T \geqslant \boldsymbol{0}^T,$$
$$\boldsymbol{c}^T - [(\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_1, \ldots, (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_n] \geqslant \boldsymbol{0}^T,$$

Silne twierdzenie o dualności...

Zatem

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{z}^T \geqslant \boldsymbol{0}^T, \\
&\boldsymbol{c}^T - [(\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_1, \ldots, (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_n] \geqslant \boldsymbol{0}^T, \\
&\boldsymbol{c}^T - (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1} [\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n] \geqslant \boldsymbol{0}^T,
\end{aligned}$$

Silne twierdzenie o dualności...

Zatem

$$\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{z}^T \geqslant \boldsymbol{0}^T,$$
$$\boldsymbol{c}^T - [(\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_1, \ldots, (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_n] \geqslant \boldsymbol{0}^T,$$
$$\boldsymbol{c}^T - (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1} [\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n] \geqslant \boldsymbol{0}^T,$$
$$\boldsymbol{c}^T - (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{0}^T,$$

Silne twierdzenie o dualności...

Zatem

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{z}^T \geqslant \boldsymbol{0}^T,\\
&\boldsymbol{c}^T - [(\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_1, \ldots, (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_n] \geqslant \boldsymbol{0}^T,\\
&\boldsymbol{c}^T - (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1}[\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n] \geqslant \boldsymbol{0}^T,\\
&\boldsymbol{c}^T - (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{0}^T,\\
&(\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T.
\end{aligned}
$$

Silne twierdzenie o dualności...

Zatem

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{c}^T - \mathbf{z}^T \geqslant \mathbf{0}^T, \\
&\mathbf{c}^T - [(\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_1, \ldots, (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_n] \geqslant \mathbf{0}^T, \\
&\mathbf{c}^T - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} [\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n] \geqslant \mathbf{0}^T, \\
&\mathbf{c}^T - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \geqslant \mathbf{0}^T, \\
&(\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \leqslant \mathbf{c}^T.
\end{aligned}
$$

Oznaczając $(\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}$ przez π^T dostajemy rozwiązanie dopuszczalne zadania dualnego:

$$\pi^T \mathbf{A} \leqslant \mathbf{c}^T.$$

Silne twierdzenie o dualności...

Trzeba jeszcze pokazać, że wartość funkcji celu zadania dualnego dla π jest równa wartości funkcji celu zadania prymalnego dla $\boldsymbol{x}$ i że π jest rozwiązaniem optymalnym.

Silne twierdzenie o dualności...

Trzeba jeszcze pokazać, że wartość funkcji celu zadania dualnego dla π jest równa wartości funkcji celu zadania prymalnego dla $\boldsymbol{x}$ i że π jest rozwiązaniem optymalnym.

$$\boldsymbol{b}^T\pi = \pi^T\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.$$

Silne twierdzenie o dualności...

Trzeba jeszcze pokazać, że wartość funkcji celu zadania dualnego dla π jest równa wartości funkcji celu zadania prymalnego dla $\boldsymbol{x}$ i że π jest rozwiązaniem optymalnym.

$$\boldsymbol{b}^T\pi = \pi^T\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.$$

Stąd i wniosku (równość wartości funkcji celu) wynika optymalność π dla zadania dualnego. $\square$

Trzy sytuacje w liniowym programowaniu

Trzy sytuacje w liniowym programowaniu

1. Zadanie ma skończone rozwiązanie optymalne - wartości funkcji celu są ograniczone z dołu (odp. z góry) dla zadania minimalizacji (odp. maksymalizacji) na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.

Trzy sytuacje w liniowym programowaniu

1. Zadanie ma skończone rozwiązanie optymalne - wartości funkcji celu są ograniczone z dołu (odp. z góry) dla zadania minimalizacji (odp. maksymalizacji) na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.
2. Wartości funkcji celu nie są ograniczone z dołu (odp. z góry) dla zadania minimalizacji (odp. maksymalizacji) na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych - zadanie nieograniczone.

Trzy sytuacje w liniowym programowaniu

1. Zadanie ma skończone rozwiązanie optymalne - wartości funkcji celu są ograniczone z dołu (odp. z góry) dla zadania minimalizacji (odp. maksymalizacji) na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.
2. Wartości funkcji celu nie są ograniczone z dołu (odp. z góry) dla zadania minimalizacji (odp. maksymalizacji) na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych - zadanie nieograniczone.
3. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest pusty - zadanie sprzeczne.

Zależności między zadaniami prymalnym i dualnym

		Zadanie dualne		
		skończone rozwiązanie optymalne	zadanie nieograniczone	zadanie sprzeczne
Zadanie prymalne	skończone rozwiązanie optymalne	1	X	X
	zadanie nieograniczone	X	X	3
	zadanie sprzeczne	X	3	2

Zależności między zadaniami...

		Zadanie dualne		
		skończone rozwiązanie optymalne	zadanie nieograniczone	zadanie sprzeczne
Zadanie prymalne	skończone rozwiązanie optymalne	1	X	X
	zadanie nieograniczone	X	X	3
	zadanie sprzeczne	X	3	2

Zależności między zadaniami...

		Zadanie dualne		
		skończone rozwiązanie optymalne	zadanie nieograniczone	zadanie sprzeczne
Zadanie prymalne	skończone rozwiązanie optymalne	1	X	X
	zadanie nieograniczone	X	X	3
	zadanie sprzeczne	X	3	2

- Z silnego twierdzenie o dualności wynika przypadek 1. Ponadto twierdzenie to eliminuje również pozostałe przypadki w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie (X).

Zależności między zadaniami...

		Zadanie dualne		
		skończone rozwiązanie optymalne	zadanie nieograniczone	zadanie sprzeczne
Zadanie prymalne	skończone rozwiązanie optymalne	1	X	X
	zadanie nieograniczone	X	X	3
	zadanie sprzeczne	X	3	2

- Z silnego twierdzenie o dualności wynika przypadek 1. Ponadto twierdzenie to eliminuje również pozostałe przypadki w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie (X).
- Z wniosków (nieograniczne→sprzeczne) otrzymujemy przypadek 3, kiedy zadanie prymalne (dualne) jest nieograniczone i eliminujemy przypadek w drugim wierszu i drugiej kolumnie (X).

Zależności między zadaniami...

		Zadanie dualne		
		skończone rozwiązanie optymalne	zadanie nieograniczone	zadanie sprzeczne
Zadanie prymalne	skończone rozwiązanie optymalne	1	X	X
	zadanie nieograniczone	X	X	3
	zadanie sprzeczne	X	3	2

- Z silnego twierdzenie o dualności wynika przypadek 1. Ponadto twierdzenie to eliminuje również pozostałe przypadki w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie (X).
- Z wniosków (nieograniczne$\rightarrow$sprzeczne) otrzymujemy przypadek 3, kiedy zadanie prymalne (dualne) jest nieograniczone i eliminujemy przypadek w drugim wierszu i drugiej kolumnie (X).
- Pozostaje jeszcze rozpatrzyć przypadki, kiedy zadanie prymalne (dualne) jest sprzeczne.

Zależności między zadaniami...

Okazuje się, że jeżeli zadanie prymalne (odp. dualne) jest sprzeczne to zadanie dualne (odp. prymalne) może być też sprzeczne - jest to przypadek 2.

Zależności między zadaniami...

Okazuje się, że jeżeli zadanie prymalne (odp. dualne) jest sprzeczne to zadanie dualne (odp. prymalne) może być też sprzeczne - jest to przypadek 2.
Poniższy przykład ilustruje tę sytuację:

$$\min \; x_1 \qquad\qquad \max \; \pi_1 + \pi_2$$

$$\mathbb{X}_P = \begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ -x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \mathbb{X}_D = \begin{cases} \pi_1 - \pi_2 = 1 \\ \pi_1 - \pi_2 = 0 \\ \pi_1 \geqslant 0, \pi_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że $\mathbb{X}_P = \emptyset$ i $\mathbb{X}_D = \emptyset$ (przypadek 2).

Zależności między zadaniami...

Ponadto, z faktu, że zadanie dualne (odp. prymalne) jest sprzeczne może wynikać, że zadanie dualne (odp. prymalne) jest nieograniczone (przypadek 3).

Zależności między zadaniami...

Ponadto, z faktu, że zadanie dualne (odp. prymalne) jest sprzeczne może wynikać, że zadanie dualne (odp. prymalne) jest nieograniczone (przypadek 3).
Załóżmy, że w zadaniu prymalnym $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$, wtedy nadal $\mathbb{X}_P = \emptyset$, i

$$\min \ x_1 \qquad\qquad \max \ \pi_1 + \pi_2$$

$$\mathbb{X}_P = \begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ -x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \mathbb{X}_D = \begin{cases} \pi_1 - \pi_2 \leqslant 1 \\ \pi_1 - \pi_2 \leqslant 0 \\ \pi_1 \geqslant 0, \pi_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Teraz $\mathbb{X}_P = \emptyset$ i $\mathbb{X}_D \neq \emptyset$, ale zadanie dualne jest nieograniczone

Twierdzenie o różnicach dopełniających

Twierdzenie (o różnicach dopełniających)

Dwa rozwiązania dopuszczalne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P$ i $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D$, odpowiednio, zadania prymalnego i dualnego są optymalne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

$$(\forall i \in [m])(\pi_i(\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - b_i) = 0), \tag{8}$$

$$(\forall j \in [n])((c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j)x_j = 0), \tag{9}$$

gdzie $\boldsymbol{a}_i^T$ i $\boldsymbol{A}_j$ są, odpowiednio, i-tym wierszem, j-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$.

Twierdzenie o różnicach dopełniających...

Dowód.

Przyjmijmy oznaczenia

$$u_i = \pi_i(\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - b_i) \text{ i } v_j = (c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j)x_j.$$

Twierdzenie o różnicach dopełniających...

Dowód.

Przyjmijmy oznaczenia

$$u_i = \pi_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i) \text{ i } v_j = (c_j - \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{A}_j)x_j.$$

Z dualnych zależności

$$\mathbf{Ax} \geqslant \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \ \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{A} \leqslant \mathbf{c}^T, \boldsymbol{\pi} \geqslant \mathbf{0}$$

dostajemy

$$(\forall i \in [m])(u_i \geqslant 0) \text{ i } (\forall j \in [n])(v_j \geqslant 0).$$

Twierdzenie o różnicach dopełniających...

Dowód.

Przyjmijmy oznaczenia

$$u_i = \pi_i(\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - b_i) \text{ i } v_j = (c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j)x_j.$$

Z dualnych zależności

$$\boldsymbol{Ax} \geqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{\pi} \geqslant \boldsymbol{0}$$

dostajemy

$$(\forall i \in [m])(u_i \geqslant 0) \text{ i } (\forall j \in [n])(v_j \geqslant 0).$$

Zdefiniujmy

$$u = \sum_{i \in [m]} u_i \geqslant 0,$$

$$v = \sum_{j \in [n]} v_j \geqslant 0.$$

Twierdzenie o różnicach dopełniających...

Oczywiście

$$
\begin{aligned}
u = 0 &\Leftrightarrow (\forall i \in [m])(u_i = \pi_i(\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - b_i) = 0), \\
v = 0 &\Leftrightarrow (\forall j \in [n])(v_j = (c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j)x_j = 0).
\end{aligned}
$$

Twierdzenie o różnicach dopełniających...

Oczywiście

$$
\begin{aligned}
u = 0 &\Leftrightarrow (\forall i \in [m])(u_i = \pi_i(\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - b_i) = 0), \\
v = 0 &\Leftrightarrow (\forall j \in [n])(v_j = (c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j)x_j = 0).
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że

$$
u + v = \sum_{i\in[m]} u_i + \sum_{j\in[n]} v_j = \boldsymbol{\pi}^T(\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}.
$$

Twierdzenie o różnicach dopełniających...

Oczywiście

$$u = 0 \Leftrightarrow (\forall i \in [m])(u_i = \pi_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i) = 0),$$
$$v = 0 \Leftrightarrow (\forall j \in [n])(v_j = (c_j - \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{A}_j)x_j = 0).$$

Zauważmy, że

$$u + v = \sum_{i\in[m]} u_i + \sum_{j\in[n]} v_j = \boldsymbol{\pi}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) + (\mathbf{c}^T - \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{A})\mathbf{x} = -\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{b} + \mathbf{c}^T \mathbf{x}.$$

Zatem warunki (8) i (9) są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $u + v = 0$ lub równoważnie

$$\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}. \tag{10}$$

Twierdzenie o różnicach dopełniających...

Oczywiście

$$u = 0 \Leftrightarrow (\forall i \in [m])(u_i = \pi_i(\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - b_i) = 0),$$
$$v = 0 \Leftrightarrow (\forall j \in [n])(v_j = (c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j)x_j = 0).$$

Zauważmy, że

$$u + v = \sum_{i\in[m]} u_i + \sum_{j\in[n]} v_j = \boldsymbol{\pi}^T(\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.$$

Zatem warunki (8) i (9) są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $u + v = 0$ lub równoważnie

$$\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}. \tag{10}$$

Z wniosku (równość wartości funkcji celu) i silnego twierdzenie o dualności wynika, że warunek (10) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby rozwiązania dopuszczalne $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\pi}$ były optymalnymi, odpowiednio, zadań prymalnego i dualnego.

Info o rozwiązaniu dualnym w tablicy sympleksowej

Załóżmy, że pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne jest otrzymane za pomocą zmiennych sztucznych (jak w metodzie dwóch faz) lub za pomocą zmiennych uzupełniających Załóżmy, bez straty ogólności, że $\mathbf{I}$ zajmuje pierwsze m kolumn, np.

$$\begin{cases} \mathbf{I}\boldsymbol{x}^A + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}^A \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol{x}^A \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem sztucznych zmiennych, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem oryginalnych zmiennych, a $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jest oryginalną macierzą

Info o rozwiązaniu dualnym w tablicy sympleksowej

Załóżmy, że pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne jest otrzymane za pomocą zmiennych sztucznych (jak w metodzie dwóch faz) lub za pomocą zmiennych uzupełniających Załóżmy, bez straty ogólności, że $\mathbf{I}$ zajmuje pierwsze m kolumn, np.

$$\begin{cases} \mathbf{I}\boldsymbol{x}^A + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}^A \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol{x}^A \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem sztucznych zmiennych, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem oryginalnych zmiennych, a $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jest oryginalną macierzą W tym przypadku baza początkowa jest postaci $\boldsymbol{B} = \mathbf{I}$ a $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^A]^T$, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^A = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \geqslant \mathbf{0}$, jest pierwszym rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym problemu.

Info o rozwiązaniu dualnym w tablicy sympleksowej

Założmy, że pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne jest otrzymane za pomocą zmiennych sztucznych (jak w metodzie dwóch faz) lub za pomocą zmiennych uzupełniających Założmy, bez straty ogólności, że $\mathbf{I}$ zajmuje pierwsze m kolumn, np.

$$\begin{cases} \mathbf{I}\boldsymbol{x}^A + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}^A \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol{x}^A \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem sztucznych zmiennych, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem oryginalnych zmiennych, a $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jest oryginalną macierzą W tym przypadku baza początkowa jest postaci $\boldsymbol{B} = \mathbf{I}$ a $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^A]^T$, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^A = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \geqslant \mathbf{0}$, jest pierwszym rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym problemu. Teraz macierz ograniczeń $\boldsymbol{A}' \in \mathbb{R}^{m \times n'}$ jest postaci $\boldsymbol{A}' = [\mathbf{I}, \boldsymbol{A}]$, gdzie $n' = m + n$.

Info o rozwiązaniu dualnym w tablicy sympleksowej

Pierwsza tablica sympleksowa jest następująca:

c_j				
	zmienne bazowe	wartości zm. bazowych	$\boldsymbol{x}^A$	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{c}^B$	$\boldsymbol{x}^A$	$\boldsymbol{b}$	$\mathbf{I}$	$\boldsymbol{A}$
			$\overline{c}_j = c_j - z_j$	

Info o rozwiązaniu dualnym w tablicy sympleksowej

Pierwsza tablica sympleksowa jest następująca:

c_j				
	zmienne bazowe	wartości zm. bazowych	$\boldsymbol{x}^A$	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{c}^B$	$\boldsymbol{x}^A$	$\boldsymbol{b}$	$\mathbf{I}$	$\boldsymbol{A}$
			$\overline{c}_j = c_j - z_j$	

Rozważmy teraz końcową tablicę sympleksową, czyli tablice zawierającą rozwiązanie bazowe optymalne. Dla tego rozwiązania warunki optymalności muszą być spełnione, mianowicie

$$\overline{c}_j = c_j - z_j \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, n',$$

gdzie $z_j = (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{y}^j$, $\boldsymbol{y}^j = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}'_j \in \mathbb{R}^m$, a $\boldsymbol{A}'_j$ jest j-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}'$.

Info o rozwiązaniu dualnym w tablicy sympleksowej

Warunki optymalności są spełnione, w szczególności, dla pierwszych m kolumn macierzy jednostkowej, czyli

$$\overline{c}_j = c_j - z_j \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \dots, m.$$

Info o rozwiązaniu dualnym w tablicy sympleksowej

Warunki optymalności są spełnione, w szczególności, dla pierwszych m kolumn macierzy jednostkowej, czyli

$$\overline{c}_j = c_j - z_j \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, m.$$

Zatem

$$\overline{c}_j = c_j - z_j \qquad \text{dla } j = 1, \ldots, m,$$

Info o rozwiązaniu dualnym w tablicy sympleksowej

Warunki optymalności są spełnione, w szczególności, dla pierwszych m kolumn macierzy jednostkowej, czyli

$$\overline{c}_j = c_j - z_j \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, m.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \overline{c}_j &= c_j - z_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m, \\ \overline{c}_j &= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^j && \text{dla } j = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

Info o rozwiązaniu dualnym w tablicy sympleksowej

Warunki optymalności są spełnione, w szczególności, dla pierwszych m kolumn macierzy jednostkowej, czyli

$$\overline{c}_j = c_j - z_j \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, m.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\overline{c}_j &= c_j - z_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^j && \text{dla } j = 1, \ldots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}'_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m,
\end{aligned}$$

Info o rozwiązaniu dualnym w tablicy sympleksowej

Warunki optymalności są spełnione, w szczególności, dla pierwszych m kolumn macierzy jednostkowej, czyli

$$\overline{c}_j = c_j - z_j \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \dots, m.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\overline{c}_j &= c_j - z_j && \text{dla } j = 1, \dots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^j && \text{dla } j = 1, \dots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_j' && \text{dla } j = 1, \dots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - \pi^T \boldsymbol{A}_j' && \text{dla } j = 1, \dots, m,
\end{aligned}$$

Info o rozwiązaniu dualnym w tablicy sympleksowej

Warunki optymalności są spełnione, w szczególności, dla pierwszych m kolumn macierzy jednostkowej, czyli

$$\overline{c}_j = c_j - z_j \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \dots, m.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\overline{c}_j &= c_j - z_j && \text{dla } j = 1, \dots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^j && \text{dla } j = 1, \dots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}'_j && \text{dla } j = 1, \dots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - \pi^T \boldsymbol{A}'_j && \text{dla } j = 1, \dots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - \pi^T \boldsymbol{e}_j && \text{dla } j = 1, \dots, m,
\end{aligned}$$

Info o rozwiązaniu dualnym w tablicy sympleksowej

Warunki optymalności są spełnione, w szczególności, dla pierwszych m kolumn macierzy jednostkowej, czyli

$$\overline{c}_j = c_j - z_j \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, m.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\overline{c}_j &= c_j - z_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{y}^j && \text{dla } j = 1, \ldots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}'_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}'_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{e}_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - \pi_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m,
\end{aligned}$$

gdzie $\boldsymbol{e}_j$ jest j-tą kolumną macierzy jednostkowej.

Info o rozwiązaniu dualnym w tablicy sympleksowej

Warunki optymalności są spełnione, w szczególności, dla pierwszych m kolumn macierzy jednostkowej, czyli

$$\overline{c}_j = c_j - z_j \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, m.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\overline{c}_j &= c_j - z_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{y}^j && \text{dla } j = 1, \ldots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}'_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}'_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{e}_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m, \\
\overline{c}_j &= c_j - \pi_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m,
\end{aligned}$$

gdzie $\boldsymbol{e}_j$ jest j-tą kolumną macierzy jednostkowej. Stąd

$$\pi_j = c_j - \overline{c}_j \text{ dla } j = 1, \ldots, m.$$

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książek

- Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz.
  Combinatorial optimization: algorithms and complexity.
  Dover Publications Inc., 1998.
- Ireneusz Nykowski.
  Programowanie liniowe.
  PWE, Warszawa, 1980.