1 Dualność w programowaniu liniowym

Rozważmy zagadnienie *prymalne* w postaci kanonicznej:

$$\min \ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \quad \mathbb{X}_P = \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ i $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Wektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem n nieujemnych zmiennych decyzyjnych prymalnych. Zagadnienie *dualne* do zagadnienia prymalnego (1) jest następującej postaci:

$$\max \ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi} \quad \mathbb{X}_D = \begin{cases} \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{\pi} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \max \ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi} \quad \mathbb{X}_D = \begin{cases} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\pi} \leqslant \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{\pi} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie wektor $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem m nieujemnych zmiennych decyzyjnych dualnych.

W przypadku zagadnienia prymalnego w postaci standardowej

$$\min \ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \quad \mathbb{X}_P = \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{3}$$

zagadnienia dualne jest postaci:

$$\max \ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi} \quad \mathbb{X}_D = \begin{cases} \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m \end{cases} \Leftrightarrow \quad \max \ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi} \quad \mathbb{X}_D = \begin{cases} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\pi} \leqslant \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{4}$$

gdzie wektor $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem m zmiennych decyzyjnych dualnych nieograniczonych co do znaku.

W dalszej części wykładu zobaczymy, że zmienna prymalna x_j odpowiada j-temu ograniczeniu w zagadnieniu dualnym, $j \in [n]$. Natomiast zmienna dualna π_i odpowiada i-temu ograniczeniu z zagadnieniu prymalnym, $i \in [m]$.

W tabeli 1 przedstawiamy "techniczne" zależności między zadaniami prymalnymi i dualnymi w postaci ogólnej.

Przykład 1. *Rozważmy zadanie prymalne (zmienne dualne odpowiadające ograniczeniom podane są w nawiasach):*

$$\begin{aligned} \min\ & 40x_1 + 216x_2 + 240x_3 & \\ & 2x_1 + 18x_2 + 24x_3 \geqslant 160 & (\pi_1 \geqslant 0) \\ & 4x_1 + 18x_2 + 12x_3 \geqslant 200 & (\pi_2 \geqslant 0) \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. & \end{aligned}$$

Tabela 1: Zależności między zadaniami prymalnym i dualnym, gdzie $\boldsymbol{a}_i^T$ i $\boldsymbol{A}_j$ są odpowiednio i-tym wierszem i j-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$ i $|M_=|+|M_\geqslant| = m$ i $|N_\geqslant| + |N_\mathbb{R}| = n$.

Prymalne		Dualne
$\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$		$\max \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi}$
$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} = b_i$	$i \in M_=$	$\pi_i \in \mathbb{R}$
$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \geqslant b_i$	$i \in M_\geqslant$	$\pi_i \geqslant 0$
$x_j \geqslant 0$	$j \in N_\geqslant$	$\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}_j \leqslant c_j$
$x_j \in \mathbb{R}$	$j \in N_\mathbb{R}$	$\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}_j = c_j$

Opowiadające zadanie dualne jest postaci:

$$
\begin{aligned}
\max\ & 160\pi_1 + 200\pi_2 \\
& 2\pi_1 + 4\pi_2 \leqslant 40 && (x_1 \geqslant 0) \\
& 18\pi_1 + 18\pi_2 \leqslant 216 && (x_2 \geqslant 0) \\
& 24\pi_1 + 12\pi_2 \leqslant 240 && (x_3 \geqslant 0) \\
& \pi_1 \geqslant 0, \pi_2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Rozważmy zadanie prymalne w postaci ogólnej (zob. tabela 1):

$$
\begin{aligned}
\min\ & 10x_1 + 4x_2 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geqslant 0 && (\pi_1 \geqslant 0) \\
& 2x_1 + 1x_2 = 3 && (\pi_2 \in \mathbb{R}) \\
& 1x_1 + 12x_2 \geqslant 1 && (\pi_3 \geqslant 0) \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Opowiadające zadanie dualne jest postaci:

$$
\begin{aligned}
\max\ & 0\pi_1 + 3\pi_2 + 1\pi_3 \\
& 2\pi_1 + 2\pi_2 + 1\pi_3 \leqslant 10 && (x_1 \geqslant 0) \\
& 3\pi_1 + 1\pi_2 + 12\pi_3 = 4 && (x_2 \in \mathbb{R}) \\
& \pi_1 \geqslant 0, \pi_2 \in \mathbb{R}, \pi_3 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Bez straty ogólności przyjmijmy, następujące założenie.

Założenie 1. *Zadanie prymalne jest problemem minimalizacyjnym (oczywiście wtedy dualne jest problemem maksymalizacyjnym).*

Twierdzenie 1. *Zadanie dualne do dualnego jest zdaniem prymalnym.*

Dowód. Oczywisty. □

Twierdzenie 2 (Słabe twierdzenie o dualności)**.** *Jeśli zbiory rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}_P$ i $\mathbb{X}_D$, odpowiednio, zadania prymalnego i dualnego są niepuste, to dla dowolnych rozwiązań dopuszczalnych $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P$ i $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D$ zachodzi nierówność*

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi} \leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}. \tag{5}$$

Dowód. Podamy dowód dla postaci kanonicznej (wszystkie inne postaci są równoważne). Z założenia wiemy, że $\mathbb{X}_P \neq \emptyset$ i $\mathbb{X}_D \neq \emptyset$. Zatem $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ i $(\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T \wedge \boldsymbol{\pi} \geqslant \boldsymbol{0})$. Stąd mnożąc obustronnie powyższe nierówności przez $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\pi}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}),\\
&(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}),\\
&(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

□

Wniosek 1. *Jeżeli $\boldsymbol{x}'$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania prymalnego i $\boldsymbol{\pi}'$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego i*

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}', \tag{6}$$

wówczas $\boldsymbol{x}'$ i $\boldsymbol{\pi}'$ są rozwiązaniami optymalnymi, odpowiednio, zadania prymalnego i dualnego.

Dowód. Z twierdzenia 2 mamy:

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi}').$$

Z (6) wiemy, że $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}'$. Stąd

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P)(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}').$$

Zatem $\boldsymbol{x}'$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania prymalnego.

Podobnie dowodzimy, że $\boldsymbol{\pi}'$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania dualnego. □

Wniosek 2. *Jeżeli zadanie dualne jest nieograniczone, to zadanie prymalne jest sprzeczne.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieje rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{x}'$ zadania prymalnego. Z twierdzenia 2 mamy:

$$(\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D)(\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi} \leqslant \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}').$$

Sprzeczność z faktem, że zadanie dualne jest nieograniczone. □

Wniosek 3. *Jeżeli zadanie prymalne jest nieograniczone, to zadanie dualne jest sprzeczne.*

Twierdzenie 3 (Silne twierdzenie o dualności)**.** *Jeżeli jedno zadań, prymalne lub dualne, ma skończone rozwiązanie optymalne, to drugie też ma skończone rozwiązanie optymalne i wartość funkcji celu są równe, tj.*

$$\max_{\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D} \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\pi} = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}. \tag{7}$$

Dowód. Załóżmy, że zadanie prymalne ma skończone rozwiązanie optymalne (dla zadania dualnego dowód jest podobny). Stąd istnieje optymalne rozwiązanie bazowe dopuszczalne $\boldsymbol{x}$, tj. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}}]^T$, gdzie $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0}$, a podmacierz $\boldsymbol{B}$ jest bazą, spełniające warunek optymalności

$$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0},$$

gdzie $\boldsymbol{c}^T = [c_1, \ldots, c_n]$, $\boldsymbol{z} = [z_1, \ldots, z_n]^T$, $z_k = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^k = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_k$, a $\boldsymbol{A}_k$ jest k-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$.

Zatem

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{z}^T \geqslant \boldsymbol{0}^T,\\
&\boldsymbol{c}^T - [(\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_1, \ldots, (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_n] \geqslant \boldsymbol{0}^T,\\
&\boldsymbol{c}^T - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1} [\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n] \geqslant \boldsymbol{0}^T,\\
&\boldsymbol{c}^T - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{0}^T,\\
&(\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T.
\end{aligned}$$

Oznaczając $(\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1}$ przez $\boldsymbol{\pi}^T$ dostajemy rozwiązanie dopuszczalne zadania dualnego:

$$\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T.$$

Trzeba jeszcze pokazać, że wartość funkcji celu zadania dualnego dla $\boldsymbol{\pi}$ jest równa wartości funkcji celu zadania prymalnego dla $\boldsymbol{x}$ i że $\boldsymbol{\pi}$ jest rozwiązaniem optymalnym.

$$\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}.$$

Stąd i wniosku 1 wynika optymalność $\boldsymbol{\pi}$ dla zadania dualnego. □

Dla zadania programowania liniowego zachodzą zawsze trzy sytuacje:

1. zadanie ma skończone rozwiązanie optymalne - wartości funkcji celu są ograniczone z dołu (odp. z góry) dla zadania minimalizacji (odp. maksymalizacji) na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych,

2. wartości funkcji celu nie są ograniczone z dołu (odp. z góry) dla zadania minimalizacji (odp. maksymalizacji) na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych - zadanie nieograniczone,

3. zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest pusty - zadanie sprzeczne.

Tabela 2 zależności między zadaniami prymalnym i dualnym. Z twierdzenia 3 wynika przypadek 1. Ponadto twierdzenie to eliminuje również pozostałe przypadki w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie (X). Z wniosków 2 i 3 otrzymujemy przypadek 3, kiedy zadanie prymalne (dualne) jest nieograniczone i eliminujemy przypadek w drugim wierszu i drugiej kolumnie (X). Pozostaje jeszcze rozpatrzyć przypadki, kiedy zadanie prymalne (dualne) jest sprzeczne. Okazuje się, że jeżeli zadanie prymalne (odp. dualne) jest sprzeczne to zadanie dualne (odp. prymalne) może być też sprzeczne - jest to przypadek 2. Poniższy przykład ilustruje tę sytuację:

$$
\begin{array}{ll}
 & \min\ x_1 \\
\mathbb{X}_P = & \left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ -x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & \max\ \pi_1 + \pi_2 \\
\mathbb{X}_D = & \left\{ \begin{array}{r} \pi_1 - \pi_2 = 1 \\ \pi_1 - \pi_2 = 0 \\ \pi_1 \geqslant 0, \pi_2 \geqslant 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

Łatwo zauważyć, że $\mathbb{X}_P = \emptyset$ i $\mathbb{X}_D = \emptyset$ (przypadek 2). Ponadto, z faktu, że zadanie dualne (odp. prymalne) jest sprzeczne może wynikać, że zadanie dualne (odp. prymalne) jest nieograniczone (przypadek 3). Wróćmy do powyższego przykładu. Jeśli założymy, że w zadaniu prymalnym $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$, nadal $\mathbb{X}_P = \emptyset$, wówczas zadanie dualne jest postaci:

$$
\begin{array}{ll}
 & \max\ \pi_1 + \pi_2 \\
\mathbb{X}_D = & \left\{ \begin{array}{r} \pi_1 - \pi_2 \leqslant 1 \\ \pi_1 - \pi_2 \leqslant 0 \\ \pi_1 \geqslant 0, \pi_2 \geqslant 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

Teraz $\mathbb{X}_D \neq \emptyset$, ale zadanie dualne jest nieograniczone.

Twierdzenie 4 (o różnicach dopełniających)**.** *Dwa rozwiązania dopuszczalne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P$ i $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D$, odpowiednio, zadania prymalnego i dualnego są optymalne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:*

$$(\forall i \in [m])(\pi_i(\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - b_i) = 0), \tag{8}$$

$$(\forall j \in [n])((c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j) x_j = 0), \tag{9}$$

gdzie $\boldsymbol{a}_i^T$ i $\boldsymbol{A}_j$ są, odpowiednio, i-tym wierszem, j-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$.

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia $u_i = \pi_i(\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - b_i)$ i $v_j = (c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j) x_j$. Z dualnych zależności ($\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{\pi} \geqslant \boldsymbol{0}$) dostajemy ($\forall i \in$

Tabela 2: Zależności między zadaniami prymalnym i dualnym

		Zadanie dualne		
		skończone rozwiązanie optymalne	zadanie nieograniczone	zadanie sprzeczne
Zadanie prymalne	skończone rozwiązanie optymalne	1	X	X
	zadanie nieograniczone	X	X	3
	zadanie sprzeczne	X	3	2

$[m])(u_i \geqslant 0)$ i $(\forall j \in [n])(v_j \geqslant 0)$. Zdefiniujmy

$$u = \sum_{i\in[m]} u_i \geqslant 0,$$
$$v = \sum_{j\in[n]} v_j \geqslant 0.$$

Oczywiście

$$u = 0 \Leftrightarrow (\forall i \in [m])(u_i = \pi_i(\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - b_i) = 0),$$
$$v = 0 \Leftrightarrow (\forall j \in [n])(v_j = (c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j)x_j = 0).$$

Zauważmy, że

$$u + v = \sum_{i\in[m]} u_i + \sum_{j\in[n]} v_j = \boldsymbol{\pi}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.$$

Zatem warunki (8) i (9) są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $u + v = 0$ lub równoważnie

$$\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}. \tag{10}$$

Z wniosku 1 i twierdzenia 3 wynika, że warunek (10) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby rozwiązania dopuszczalne $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\pi}$ były optymalnymi, odpowiednio, zadań prymalnego i dualnego. □

2 Informacja o rozwiązaniu dualnym w tablicy sympleksowej

Przedstawimy teraz jak wydobyć informację o rozwiązaniu dualnym z tablicy sympleksowej bez rozwiązywania zadania dualnego.

Załóżmy, że pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne jest otrzymane za pomocą zmiennych sztucznych (jak w metodzie dwóch faz) lub za pomocą zmiennych uzupełniających (dodajemy zmienne, aby przekształcić ograniczenia nierównościowe w równościowe), czyli w przekształconym zadaniu programowania linowego macierz układu ograniczeń zawiera macierz jednostkową. Załóżmy, bez straty ogólności, że zajmuje pierwsze m kolumn, np.

$$\begin{cases} \mathbf{I}\,\boldsymbol{x}^A + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}^A \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol{x}^A \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem sztucznych zmiennych, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem oryginalnych zmiennych, a $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jest oryginalną macierzą W tym przypadku baza początkowa jest postaci $\boldsymbol{B} = \mathbf{I}$ a $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^A]^T$, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^A = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \geqslant \mathbf{0}$, jest pierwszym rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym problemu. Teraz macierz ograniczeń $\boldsymbol{A}' \in \mathbb{R}^{m\times n'}$ jest postaci $\boldsymbol{A}' = [\mathbf{I}, \boldsymbol{A}]$, gdzie $n' = m+n$. Pierwsza tablica sympleksowa jest następująca:

c_j				
	zmienne bazowe	wartości zm. bazowych	$\boldsymbol{x}^A$	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}}$	$\boldsymbol{x}^A$	$\boldsymbol{b}$	$\mathbf{I}$	$\boldsymbol{A}$
			$\bar{c}_j = c_j - z_j$	

Rozważmy teraz końcową tablicę sympleksową, czyli tablice zawierającą rozwiązanie bazowe optymalne. Dla tego rozwiązania warunki optymalności muszą być spełnione, mianowicie

$$\bar{c}_j = c_j - z_j \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \dots, n',$$

gdzie $z_j = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^j$, $\boldsymbol{y}^j = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}'_j \in \mathbb{R}^m$, a $\boldsymbol{A}'_j$ jest j-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}'$. Przypomnijmy, że wektor kolumn $[\boldsymbol{y}^1, \dots, \boldsymbol{y}^{n'}]$ znajduje się w końcowej tablicy sympleksowej na miejscu $[\mathbf{I}, \boldsymbol{A}]$. Warunki optymalności są spełnione, w szczególności, dla pierwszych m kolumn macierzy jednostkowej, czyli

$$\bar{c}_j = c_j - z_j \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \dots, m.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\bar{c}_j &= c_j - z_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m,\\
\bar{c}_j &= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^j && \text{dla } j = 1, \ldots, m,\\
\bar{c}_j &= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}'_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m,\\
\bar{c}_j &= c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}'_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m,\\
\bar{c}_j &= c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{e}_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m,\\
\bar{c}_j &= c_j - \pi_j && \text{dla } j = 1, \ldots, m,
\end{aligned}$$

gdzie $\boldsymbol{e}_j$ jest j-tą kolumną macierzy jednostkowej. Otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie optymalne zadania dualnego $\boldsymbol{\pi}$, które było "zaszyte" we wskaźnikach optymalności:

$$\pi_j = c_j - \bar{c}_j \text{ dla } j = 1, \ldots, m.$$

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu została przygotowana na podstawie książek [2, 1].

Literatura

[1] Ireneusz Nykowski. *Programowanie liniowe.* PWE, Warszawa, 1980.

[2] Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz. *Combinatorial optimization: algorithms and complexity.* Dover Publications Inc., 1998.