Metody optymalizacji
Wykład nr 7

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska

Dualny algorytm sympleks

W przypadku zagadnienia prymalnego w postaci standardowej

$$\min \; \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

$$\mathbb{X}_P = \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

Dualny algorytm sympleks

W przypadku zagadnienia prymalnego w postaci standardowej

$$\mathbb{X}_P = \begin{cases} \min \ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

zagadnienia dualne jest postaci:

$$\mathbb{X}_D = \begin{cases} \max \ \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m \end{cases} \Leftrightarrow \quad \mathbb{X}_D = \begin{cases} \max \ \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\pi} \leqslant \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem m zmiennych decyzyjnych dualnych nieograniczonych co do znaku.

Prymalny algorytm sympleks - przypomnienie

- Startuje od rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\boldsymbol{x}^{(0)}$.

Prymalny algorytm sympleks - przypomnienie

- Startuje od rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\boldsymbol{x}^{(0)}$.
- W każdym kroku r konstruuje sąsiednie rozwiązanie bazowe dopuszczalne $\boldsymbol{x}^{(r)}$, tj.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(r)} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}, \ \boldsymbol{x}^{(r)} = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}}]^T,$$

gdzie $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \mathbf{0}$, a podmacierz $\boldsymbol{B}$ jest bazą.

Prymalny algorytm sympleks - przypomnienie

- Startuje od rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\boldsymbol{x}^{(0)}$.
- W każdym kroku r konstruuje sąsiednie rozwiązanie bazowe dopuszczalne $\boldsymbol{x}^{(r)}$, tj.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(r)} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \; \boldsymbol{x}^{(r)} = [\boldsymbol{x}^{B}, \boldsymbol{x}^{P}]^{T},$$

gdzie $\boldsymbol{x}^{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{x}^{P} = \boldsymbol{0}$, a podmacierz $\boldsymbol{B}$ jest bazą.
Jeśli $\boldsymbol{x}^{(r)}$ spełnia warunek optymalności

$$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0},$$

wówczas algorytm kończy działanie.

Warunek optymalności, rozwiązanie dualne

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{c}^T - \mathbf{z}^T \geqslant \mathbf{0}^T,\\
&\mathbf{c}^T - [(\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1, \ldots, (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_n] \geqslant \mathbf{0}^T,\\
&\mathbf{c}^T - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n] \geqslant \mathbf{0}^T,\\
&\mathbf{c}^T - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geqslant \mathbf{0}^T,\\
&(\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \leqslant \mathbf{c}^T,\\
&\pi^T \mathbf{A} \leqslant \mathbf{c}^T.
\end{aligned}
$$

Warunek optymalności, rozwiązanie dualne

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{z}^T \geqslant \boldsymbol{0}^T,\\
&\boldsymbol{c}^T - [(\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_1, \ldots, (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_n] \geqslant \boldsymbol{0}^T,\\
&\boldsymbol{c}^T - (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}[\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n] \geqslant \boldsymbol{0}^T,\\
&\boldsymbol{c}^T - (\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{0}^T,\\
&(\boldsymbol{c}^B)^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T,\\
&\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T.
\end{aligned}
$$

Przyjmijmy (jak do tej pory), że pierwsze m kolumn w $\boldsymbol{A}$ to kolumny bazowe.

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}_j = c_j & \text{dla } j = 1, \ldots, m,\\
\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}_j \geqslant c_j & \text{dla } j = m+1, \ldots, n.
\end{cases}
$$

Warunek optymalności, rozwiązanie dualne...

Definicja

Niech $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ *będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego.*

Warunek optymalności, rozwiązanie dualne...

Definicja

Niech $\mathbf{x^B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ *będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego.*

- $\mathbf{x^B}$ *jest dualnie dopuszczalne jeśli spełnienia warunek optymalności, a co za tym idzie istnieje opowiadające rozwiązanie dopuszczalne* π *zadania dualnego.*

Warunek optymalności, rozwiązanie dualne...

Definicja

Niech $\mathbf{x^B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ *będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego.*

- $\mathbf{x^B}$ *jest dualnie dopuszczalne jeśli spełnienia warunek optymalności, a co za tym idzie istnieje opowiadające rozwiązanie dopuszczalne* π *zadania dualnego.*
- $\mathbf{x^B}$ *jest prymalnie dopuszczalne jeśli* $\mathbf{x^B} \geqslant \mathbf{0}$.

Algorytm dualny - idea

- Niech $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest dualnie dopuszczalne.

Algorytm dualny - idea

- Niech $\boldsymbol{x^B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest dualnie dopuszczalne.
- Jeśli $\boldsymbol{x^B} \geqslant \boldsymbol{0}$, czyli $\boldsymbol{x^B}$ jest prymalnie dopuszczalne, to algorytm kończy działanie.

Algorytm dualny - idea

- Niech $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest dualnie dopuszczalne.
- Jeśli $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \geqslant \boldsymbol{0}$, czyli $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}$ jest prymalnie dopuszczalne, to algorytm kończy działanie.
- W przeciwnym przypadku, gdy $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \not\geqslant \boldsymbol{0}$, algorytm dąży ku dopuszczalności prymalnej rozwiązania bazowego $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}$, pozbywając się ujemnych składowych $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}$, zachowując jednocześnie jego optymalność (dualną dopuszczalność) i maksymalizując wartość dualnej funkcji celu $\boldsymbol{b}^T\pi$.

Algorytm dualny - idea

- Niech $\boldsymbol{x}^B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest dualnie dopuszczalne.
- Jeśli $\boldsymbol{x}^B \geqslant \boldsymbol{0}$, czyli $\boldsymbol{x}^B$ jest prymalnie dopuszczalne, to algorytm kończy działanie.
- W przeciwnym przypadku, gdy $\boldsymbol{x}^B \ngeqslant \boldsymbol{0}$, algorytm dąży ku dopuszczalności prymalnej rozwiązania bazowego $\boldsymbol{x}^B$, pozbywając się ujemnych składowych $\boldsymbol{x}^B$, zachowując jednocześnie jego optymalność (dualną dopuszczalność) i maksymalizując wartość dualnej funkcji celu $\boldsymbol{b}^T\pi$.

Algorytm kończy działanie po skończonej liczbie kroków. Wtedy

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T\pi.$$

Widać, że algorytm dualny sympleks niejawnie rozwiązuje zadanie prymalne.

Algorytm prymalny - algorytm dualny

algorytm prymalny			algorytm dualny		
$x^B \geqslant 0$	$c - z \not\geqslant 0$	$\pi^T A \not\leqslant c^T$	$x^B \not\geqslant 0$	$c - z \geqslant 0$	$\pi^T A \leqslant c^T$
$x^B \geqslant 0$	$c - z \not\geqslant 0$	$\pi^T A \not\leqslant c^T$	$x^B \not\geqslant 0$	$c - z \geqslant 0$	$\pi^T A \leqslant c^T$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boxed{x^B \geqslant 0}$	$\boxed{c - z \geqslant 0}$	$\boxed{\pi^T A \leqslant c^T}$	$\boxed{x^B \geqslant 0}$	$\boxed{c - z \geqslant 0}$	$\boxed{\pi^T A \leqslant c^T}$
W każdym kroku: wybieramy kolumnę A_k, która wchodzi do bazy B; wybieramy kolumnę A_{i^*}, która wychodzi z bazy B.			W każdym kroku: wybieramy kolumnę A_{i^*}, która wychodzi z bazy B; wybieramy kolumnę A_k, która wchodzi do bazy B.		

Krok dualnego algorytmu sympleks

- Niech $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest dualnie dopuszczalne.

Krok dualnego algorytmu sympleks

- Niech $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest dualnie dopuszczalne.
- Niech $\pi^T = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1}$ będzie odpowiadającym rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego.

Krok dualnego algorytmu sympleks

- Niech $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest dualnie dopuszczalne.
- Niech $\pi^T = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1}$ będzie odpowiadającym rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego.
- Zakładamy, że pierwsze m kolumn to kolumny bazowe.

Krok dualnego algorytmu sympleks

- Niech $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest dualnie dopuszczalne.
- Niech $\pi^T = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1}$ będzie odpowiadającym rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego.
- Zakładamy, że pierwsze m kolumn to kolumny bazowe.
- Kolumna i^* (zmienna) wychodzi z bazy.

Krok dualnego algorytmu sympleks

- Niech $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest dualnie dopuszczalne.
- Niech $\pi^T = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1}$ będzie odpowiadającym rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego.
- Zakładamy, że pierwsze m kolumn to kolumny bazowe.
- Kolumna i^* (zmienna) wychodzi z bazy.
- Kolumna k (zmienna) wchodzi do bazy.

Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, , \color{red}{\boldsymbol{B}_{i^*}}, \ldots, \boldsymbol{B}_m] \to \overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i^*-1}, \boldsymbol{B}_{i^*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \color{blue}{\boldsymbol{P}_k}].$$

Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, , \boldsymbol{B}_{i^*}, \ldots, \boldsymbol{B}_m] \to \overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i^*-1}, \boldsymbol{B}_{i^*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{P}_k].$$

Kolumna bazowa $\boldsymbol{B}_{i^*}$ wychodzi z bazy, kolumna niebazowa $\boldsymbol{P}_k$ wchodzi.

Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, , \boldsymbol{B}_{i*}, \ldots, \boldsymbol{B}_m] \to \overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i*-1}, \boldsymbol{B}_{i*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{P}_k].$$

Kolumna bazowa $\boldsymbol{B}_{i*}$ wychodzi z bazy, kolumna niebazowa $\boldsymbol{P}_k$ wchodzi. Przedstawmy kolumnę niebazową $\boldsymbol{P}_k$ w starej bazie $\boldsymbol{B}$

$$y_1^k \boldsymbol{B}_1 + \cdots + y_{i*-1}^k \boldsymbol{B}_{i*-1} + y_{i*}^k \boldsymbol{B}_{i*} + y_{i*+1}^k \boldsymbol{B}_{i*+1} + \cdots + y_m^k \boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{P}_k \qquad (1)$$

Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, , \boldsymbol{B}_{i^*}, \ldots, \boldsymbol{B}_m] \rightarrow \overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i^*-1}, \boldsymbol{B}_{i^*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{P}_k].$$

Kolumna bazowa $\boldsymbol{B}_{i^*}$ wychodzi z bazy, kolumna niebazowa $\boldsymbol{P}_k$ wchodzi. Przedstawmy kolumnę niebazową $\boldsymbol{P}_k$ w starej bazie $\boldsymbol{B}$

$$y_1^k \boldsymbol{B}_1 + \cdots + y_{i^*-1}^k \boldsymbol{B}_{i^*-1} + y_{i^*}^k \boldsymbol{B}_{i^*} + y_{i^*+1}^k \boldsymbol{B}_{i^*+1} + \cdots + y_m^k \boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{P}_k \qquad (1)$$

Przedstawmy kolumnę niebazową $\boldsymbol{P}_j$ w starej bazie

$$y_1^j \boldsymbol{B}_1 + \cdots + y_{i^*-1}^j \boldsymbol{B}_{i^*-1} + y_{i^*}^j \boldsymbol{B}_{i^*} + y_{i^*+1}^j \boldsymbol{B}_{i^*+1} + \cdots + y_m^j \boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{P}_j \qquad (2)$$

Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, , \boldsymbol{B}_{i^*}, \ldots, \boldsymbol{B}_m] \rightarrow \overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i^*-1}, \boldsymbol{B}_{i^*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{P}_k].$$

Kolumna bazowa $\boldsymbol{B}_{i^*}$ wychodzi z bazy, kolumna niebazowa $\boldsymbol{P}_k$ wchodzi. Przedstawmy kolumnę niebazową $\boldsymbol{P}_k$ w starej bazie $\boldsymbol{B}$

$$y_1^k \boldsymbol{B}_1 + \cdots + y_{i^*-1}^k \boldsymbol{B}_{i^*-1} + y_{i^*}^k \boldsymbol{B}_{i^*} + y_{i^*+1}^k \boldsymbol{B}_{i^*+1} + \cdots + y_m^k \boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{P}_k \qquad (1)$$

Przedstawmy kolumnę niebazową $\boldsymbol{P}_j$ w starej bazie

$$y_1^j \boldsymbol{B}_1 + \cdots + y_{i^*-1}^j \boldsymbol{B}_{i^*-1} + y_{i^*}^j \boldsymbol{B}_{i^*} + y_{i^*+1}^j \boldsymbol{B}_{i^*+1} + \cdots + y_m^j \boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{P}_j \qquad (2)$$

Mnożąc (1) przez $\frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k}$, odejmujemy od (2) i otrzymujemy przedstawienie $\boldsymbol{P}_j$ nowej bazie

Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$(y_1^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_1^k)\boldsymbol{B}_1 + \cdots + (y_{i*-1}^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_{i*-1}^k)\boldsymbol{B}_{i*-1} + (\mathbf{y}_{i*}^{\mathbf{j}} - \frac{\mathbf{y}_{i*}^{\mathbf{j}}}{\mathbf{y}_{i*}^{\mathbf{k}}} \mathbf{y}_{i*}^{\mathbf{k}})\boldsymbol{B}_{\mathbf{i}*} +$$

$$(y_{i*+1}^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_{i*+1}^k)\boldsymbol{B}_{i*+1} + \cdots + (y_m^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_m^k)\boldsymbol{B}_m + \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k}\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_j$$

Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$(y_1^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_1^k)\boldsymbol{B}_1 + \cdots + (y_{i*-1}^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_{i*-1}^k)\boldsymbol{B}_{i*-1} + (\mathbf{y}_{\mathbf{i*}}^{\mathbf{j}} - \frac{\mathbf{y}_{\mathbf{i*}}^{\mathbf{j}}}{\mathbf{y}_{\mathbf{i*}}^{\mathbf{k}}} \mathbf{y}_{\mathbf{i*}}^{\mathbf{k}})\boldsymbol{B}_{\mathbf{i*}} +$$

$$(y_{i*+1}^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_{i*+1}^k)\boldsymbol{B}_{i*+1} + \cdots + (y_m^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_m^k)\boldsymbol{B}_m + \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k}\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_j$$

Współrzędne $\overline{\boldsymbol{y}}^j$ kolumny $\boldsymbol{P}_j$ w nowej bazie $\overline{\boldsymbol{B}}$ wyznaczamy ze wzoru

$$\overline{y}_i^j = \begin{cases} \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} & \text{dla } i = k \\ y_i^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} y_i^k & \text{dla } i \neq k \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Nowe wskaźniki optymalności

$$c_j - \overline{z}_j = c_j - (\boldsymbol{c}^{\overline{B}})^T \overline{\boldsymbol{y}}^j =$$

Nowe wskaźniki optymalności

$$c_j - \overline{z}_j = c_j - (\boldsymbol{c}^{\overline{\boldsymbol{B}}})^T \overline{\boldsymbol{y}}^j = c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T (\boldsymbol{y}^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} \boldsymbol{y}^k) - c_k \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k}$$

Nowe wskaźniki optymalności

$$c_j - \overline{z}_j = c_j - (\boldsymbol{c}^{\overline{\boldsymbol{B}}})^T \overline{\boldsymbol{y}}^j = c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T (\boldsymbol{y}^j - \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}} \boldsymbol{y}^k) - c_k \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}}$$

$$= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^j + (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}} \boldsymbol{y}^k - c_k \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}}$$

Nowe wskaźniki optymalności

$$\begin{aligned}
c_j - \bar{z}_j = c_j - (\boldsymbol{c}^{\overline{\boldsymbol{B}}})^T \bar{\boldsymbol{y}}^j &= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T (\boldsymbol{y}^j - \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}} \boldsymbol{y}^k) - c_k \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}} \\
&= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^j + (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}} \boldsymbol{y}^k - c_k \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}} \\
&= c_j - z_j - \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}} (c_k - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^k) = c_j - z_j - \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}} (c_k - z_k).
\end{aligned}$$

Nowe wskaźniki optymalności

$$c_j - \overline{z}_j = c_j - (\boldsymbol{c}^{\overline{\boldsymbol{B}}})^T \overline{\boldsymbol{y}}^j = c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \left(\boldsymbol{y}^j - \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}} \boldsymbol{y}^k\right) - c_k \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}}$$

$$= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^j + (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}} \boldsymbol{y}^k - c_k \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}}$$

$$= c_j - z_j - \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}} \left(c_k - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^k\right) = c_j - z_j - \frac{y^j_{i*}}{y^k_{i*}} (c_k - z_k).$$

Niech

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y^k_{i*}}.$$

Nowe wskaźniki optymalności

$$c_j - \bar{z}_j = c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \bar{\boldsymbol{y}}^j = c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T (\boldsymbol{y}^j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} \boldsymbol{y}^k) - c_k \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k}$$

$$= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^j + (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} \boldsymbol{y}^k - c_k \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k}$$

$$= c_j - z_j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} (c_k - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^k) = c_j - z_j - \frac{y_{i*}^j}{y_{i*}^k} (c_k - z_k).$$

Niech

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{i*}^k}.$$

Zależność miedzy starym a nowym wskaźnikiem optymalności wyraża się następująco:

$$c_j - \bar{z}_j = c_j - z_j - \Theta\, y_{i*}^j.$$

Nowe wskaźniki optymalności...

Sprawdźmy jeszcze jak wyglądają nowe wskaźniki optymalności

Nowe wskaźniki optymalności...

Sprawdźmy jeszcze jak wyglądają nowe wskaźniki optymalności

- dla zmiennej (kolumny) k wchodzącej do bazy

$$c_k - \overline{z}_k = c_k - z_k - \Theta\, y_{i^*}^k = c_k - z_k - \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k} y_{i^*}^k = 0,$$

Nowe wskaźniki optymalności...

Sprawdźmy jeszcze jak wyglądają nowe wskaźniki optymalności

- dla zmiennej (kolumny) k wchodzącej do bazy

$$c_k - \overline{z}_k = c_k - z_k - \Theta\, y_{i^*}^k = c_k - z_k - \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k} y_{i^*}^k = 0,$$

- dla zmiennej (kolumny) i^* wychodzącej z bazy

$$c_{i^*} - \overline{z}_{i^*} = c_{i^*} - z_{i^*} - \Theta\, y_{i^*}^{i^*} = -\Theta,$$

gdzie $c_{i^*} - z_{i^*} = 0$ (ponieważ kolumna i^* była bazowa), $y_{i^*}^{i^*} = 1$.

Nowe rozwiązanie dualne i nowa wartość funkcji celu

$$c_j - \overline{z}_j = c_j - \overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j$$

Nowe rozwiązanie dualne i nowa wartość funkcji celu

$$c_j - \overline{z}_j = c_j - \overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j = c_j - (\boldsymbol{c}^{\overline{\boldsymbol{B}}})^T \overline{\boldsymbol{B}}^{-1} \boldsymbol{A}_j = c_j - z_j - \Theta\, y^j_{i^*}$$

Nowe rozwiązanie dualne i nowa wartość funkcji celu

$$
\begin{aligned}
c_j - \overline{z}_j = c_j - \overline{\pi}^T \mathbf{A}_j &= c_j - (\mathbf{c}^{\overline{B}})^T \overline{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}_j = c_j - z_j - \Theta\, y^j_{i*} \\
&= c_j - (\mathbf{c}^{B})^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j - \Theta\ \mathrm{wiersz}_{i*}(\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}_j
\end{aligned}
$$

Nowe rozwiązanie dualne i nowa wartość funkcji celu

$$
\begin{aligned}
c_j - \bar{z}_j = c_j - \bar{\pi}^T \boldsymbol{A}_j = c_j - (\boldsymbol{c}^{\bar{\boldsymbol{B}}})^T \bar{\boldsymbol{B}}^{-1} \boldsymbol{A}_j &= c_j - z_j - \Theta\, y^j_{i*} \\
&= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_j - \Theta\, \mathrm{wiersz}_{i*}(\boldsymbol{B}^{-1}) \boldsymbol{A}_j \\
&= c_j - (\pi^T + \Theta\, \mathrm{wiersz}_{i*}(\boldsymbol{B}^{-1})) \boldsymbol{A}_j .
\end{aligned}
$$

Nowe rozwiązanie dualne i nowa wartość funkcji celu

$$\begin{aligned} c_j - \overline{z}_j = c_j - \overline{\pi}^T A_j &= c_j - (c^{\overline{B}})^T \overline{B}^{-1} A_j = c_j - z_j - \Theta\, y^j_{i*} \\ &= c_j - (c^B)^T B^{-1} A_j - \Theta \text{ wiersz}_{i*}(B^{-1}) A_j \\ &= c_j - (\pi^T + \Theta \text{ wiersz}_{i*}(B^{-1})) A_j. \end{aligned}$$

Zatem zależność między starym a nowym rozwiązaniem dualnym jest następująca:

$$\overline{\pi}^T = \pi^T + \Theta \,\text{wiersz}_{i*}(B^{-1}).$$

Nowe rozwiązanie dualne i nowa wartość funkcji celu

$$
\begin{aligned}
c_j - \bar{z}_j = c_j - \bar{\pi}^T \boldsymbol{A}_j = c_j - (\boldsymbol{c}^{\bar{B}})^T \bar{\boldsymbol{B}}^{-1} \boldsymbol{A}_j &= c_j - z_j - \Theta\, y^j_{i*} \\
&= c_j - (\boldsymbol{c}^B)^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_j - \Theta\, \mathrm{wiersz}_{i*}(\boldsymbol{B}^{-1}) \boldsymbol{A}_j \\
&= c_j - (\pi^T + \Theta\, \mathrm{wiersz}_{i*}(\boldsymbol{B}^{-1})) \boldsymbol{A}_j .
\end{aligned}
$$

Zatem zależność między starym a nowym rozwiązaniem dualnym jest następująca:

$$
\bar{\pi}^T = \pi^T + \Theta\, \mathrm{wiersz}_{i*}(\boldsymbol{B}^{-1}).
$$

Stąd dostajemy zależności wartości funkcji celu dla nowego i starego rozwiązania dualnego:

$$
\bar{\pi}^T \boldsymbol{b} = \pi^T \boldsymbol{b} + \Theta\, \mathrm{wiersz}_{i*}(\boldsymbol{B}^{-1}) \boldsymbol{b} = \pi^T \boldsymbol{b} + \Theta\, x^{\boldsymbol{B}}_{i*} .
$$

Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy

Nowe rozwiązanie dualne $\overline{\pi}$ musi być dopuszczalne. Zatem wymuszamy warunek optymalności

$$c_j - \overline{z}_j = c_j - z_j - \Theta\, y^j_{i*} \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, n.$$

Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy

Nowe rozwiązanie dualne π musi być dopuszczalne. Zatem wymuszamy warunek optymalności

$$c_j - \overline{z}_j = c_j - z_j - \Theta\, y^j_{i*} \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, n.$$

Zachowując powyższy warunek optymalności otrzymujemy kryterium wejścia do bazy:

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y^k_{i*}} = \max\left\{ \frac{c_j - z_j}{y^j_{i*}} \;:\; y^j_{i*} < 0, j = m+1, \ldots, n \right\}.$$

Ponieważ stare wskaźniki optymalności są nieujemne $c_j - z_j \geqslant 0$, to $\Theta \leqslant 0$.

Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy

Nowe rozwiązanie dualne π musi być dopuszczalne. Zatem wymuszamy warunek optymalności

$$c_j - \overline{z}_j = c_j - z_j - \Theta\, y^j_{i*} \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, n.$$

Zachowując powyższy warunek optymalności otrzymujemy kryterium wejścia do bazy:

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y^k_{i*}} = \max\left\{ \frac{c_j - z_j}{y^j_{i*}} \;:\; y^j_{i*} < 0, j = m+1, \ldots, n \right\}.$$

Ponieważ stare wskaźniki optymalności są nieujemne $c_j - z_j \geqslant 0$, to $\Theta \leqslant 0$. Indeks ilorazu, k, dla którego jest przyjęte jest maksimum jest indeksem zmiennej (kolumny), która wchodzi do bazy.

Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy...

Może pojawić się problem z istnieniem $y^j_{i*} < 0$ dla $j = m + 1, \ldots, n$ (dla $j = 1, \ldots, m$, $y^j_{i*} \geqslant 0$), wówczas nowe wskaźniki optymalności są nieujemne jest spełniony ($c_j - \overline{z}_j \geqslant 0$) dla $\Theta \in (-\infty, 0]$.

Θ ma nieograniczoną wartość!

Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy...

Może pojawić się problem z istnieniem $y^j_{i*} < 0$ dla $j = m + 1, \ldots, n$ (dla $j = 1, \ldots, m$, $y^j_{i*} \geqslant 0$), wówczas nowe wskaźniki optymalności są nieujemne jest spełniony $(c_j - \overline{z}_j \geqslant 0)$ dla $\Theta \in (-\infty, 0]$.

Θ ma nieograniczoną wartość!

- Dążymy, aby $\boldsymbol{x}^B$ było prymalnie dopuszczalne, $\boldsymbol{x}^B \geqslant \boldsymbol{0}$.

Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy...

Może pojawić się problem z istnieniem $y^j_{i*} < 0$ dla $j = m+1, \ldots, n$ (dla $j = 1, \ldots, m$, $y^j_{i*} \geqslant 0$), wówczas nowe wskaźniki optymalności są nieujemne jest spełniony $(c_j - \overline{z}_j \geqslant 0)$ dla $\Theta \in (-\infty, 0]$.

Θ ma nieograniczoną wartość!

- Dążymy, aby $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}$ było prymalnie dopuszczalne, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \geqslant \boldsymbol{0}$.
- Pozbywamy się ujemnych składowych $x^{\boldsymbol{B}}_{i*} < 0$ - kryterium wyjścia zmiennej (kolumny) i^* z bazy.

Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy...

Może pojawić się problem z istnieniem $y^j_{i*} < 0$ dla $j = m+1, \ldots, n$ (dla $j = 1, \ldots, m$, $y^j_{i*} \geqslant 0$), wówczas nowe wskaźniki optymalności są nieujemne jest spełniony ($c_j - \overline{z}_j \geqslant 0$) dla $\Theta \in (-\infty, 0]$.

Θ ma nieograniczoną wartość!

- Dążymy, aby $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}$ było prymalnie dopuszczalne, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \geqslant \boldsymbol{0}$.
- Pozbywamy się ujemnych składowych $x^{\boldsymbol{B}}_{i*} < 0$ - kryterium wyjścia zmiennej (kolumny) i^* z bazy.
- Stąd wartość funkcji celu zadania dualnego jest nieograniczona z góry (maksymalizujemy ją)!

$$\overline{\pi}^T \boldsymbol{b} = \pi^T \boldsymbol{b} + \Theta \, x^{\boldsymbol{B}}_{i*}.$$

Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy...

Może pojawić się problem z istnieniem $y^j_{i*} < 0$ dla $j = m+1, \ldots, n$ (dla $j = 1, \ldots, m$, $y^j_{i*} \geqslant 0$), wówczas nowe wskaźniki optymalności są nieujemne jest spełniony ($c_j - \overline{z}_j \geqslant 0$) dla $\Theta \in (-\infty, 0]$.

Θ ma nieograniczoną wartość!

- Dążymy, aby $\boldsymbol{x^B}$ było prymalnie dopuszczalne, $\boldsymbol{x^B} \geqslant \mathbf{0}$.
- Pozbywamy się ujemnych składowych $x^B_{i*} < 0$ - kryterium wyjścia zmiennej (kolumny) i^* z bazy.
- Stąd wartość funkcji celu zadania dualnego jest nieograniczona z góry (maksymalizujemy ją)!

$$\overline{\pi}^T \boldsymbol{b} = \pi^T \boldsymbol{b} + \Theta\, x^B_{i*}.$$

- Zatem zadanie dualne jest nieograniczone a prymalne sprzeczne - algorytm kończy działanie!

Szkic dualnego algorytmu sympleks

Niech $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego które jest *dualnie dopuszczalne*, a co za tym idzie istnieje rozwiązanie dopuszczalne zadania dualnego postaci $\pi^T = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1}$.

Szkic dualnego algorytmu sympleks

Niech $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego które jest *dualnie dopuszczalne*, a co za tym idzie istnieje rozwiązanie dopuszczalne zadania dualnego postaci $\pi^T = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1}$.

Krok 1 Jeżeli $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \geqslant \boldsymbol{0}$ jest rozwiązaniem bazowym prymalnie dopuszczalnym, to rozwiązanie $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{0}]^T$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania prymalnego, STOP.
W przeciwnym przypadku wybierz zmienną x_{i^*} (kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$), która wychodzi z bazy, np.

$$x_{i^*} = \min\{x_i^{\boldsymbol{B}} : x_i^{\boldsymbol{B}} < 0, i = 1, \ldots, m\}.$$

Szkic dualnego algorytmu sympleks...

Krok 2 Wybierz zmienną x_k (kolumnę $\boldsymbol{A}_k$), która wchodzi do bazy

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{i*}^k} = \max\left\{ \frac{c_j - z_j}{y_{i*}^j} \ : \ y_{i*}^j < 0, j = m+1, \ldots, n \right\}.$$

Jeśli $y_{i*}^j \geqslant 0$ dla $j = m+1, \ldots, n$, to zadanie dualne jest nieograniczone. Zatem zadanie prymalne jest sprzeczne, STOP.

Szkic dualnego algorytmu sympleks...

Krok 2 Wybierz zmienną x_k (kolumnę $\boldsymbol{A}_k$), która wchodzi do bazy

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{i*}^k} = \max\left\{\frac{c_j - z_j}{y_{i*}^j} \;:\; y_{i*}^j < 0, j = m+1, \ldots, n\right\}.$$

Jeśli $y_{i*}^j \geqslant 0$ dla $j = m+1, \ldots, n$, to zadanie dualne jest nieograniczone. Zatem zadanie prymalne jest sprzeczne, STOP.

Krok 3 Uaktualnij:

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{B}} &:= [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i*-1}, \boldsymbol{B}_{i*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{A}_k], \\
\overline{\boldsymbol{\pi}}^T &:= \boldsymbol{\pi}^T + \Theta\,\mathrm{wiersz}_{i*}(\boldsymbol{B}^{-1}), \\
\overline{\boldsymbol{x}}^B &:= \overline{\boldsymbol{B}}^{-1}\boldsymbol{b}.
\end{aligned}$$

Szkic dualnego algorytmu sympleks...

Krok 2 Wybierz zmienną x_k (kolumnę $\boldsymbol{A}_k$), która wchodzi do bazy

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y^k_{i*}} = \max\left\{\frac{c_j - z_j}{y^j_{i*}} \;:\; y^j_{i*} < 0, j = m+1, \ldots, n\right\}.$$

Jeśli $y^j_{i*} \geqslant 0$ dla $j = m+1, \ldots, n$, to zadanie dualne jest nieograniczone. Zatem zadanie prymalne jest sprzeczne, STOP.

Krok 3 Uaktualnij:

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{B}} &:= [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i*-1}, \boldsymbol{B}_{i*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{A}_k],\\
\overline{\boldsymbol{\pi}}^T &:= \boldsymbol{\pi}^T + \Theta\,\mathrm{wiersz}_{i*}(\boldsymbol{B}^{-1}),\\
\overline{\boldsymbol{x}}^B &:= \overline{\boldsymbol{B}}^{-1}\boldsymbol{b}.
\end{aligned}$$

Krok 4 Podstaw

$$\boldsymbol{B} := \overline{\boldsymbol{B}},\ \boldsymbol{\pi} := \overline{\boldsymbol{\pi}},\ \boldsymbol{x} := \overline{\boldsymbol{x}}.$$

Idź do Kroku 1.

Kiedy dualny algorytm sympleks jest użyteczny?

- (“warm start") Po rozwiązaniu zadania prymalnego modyfikujemy wektor prawych stron $\boldsymbol{b}$. Wówczas wskaźniki optymalności pozostają niezmienione, ale nowe rozwiązanie bazowe $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}$ może zawierać składowe ujemne. Ponieważ mamy parę $(\pi, \tilde{\boldsymbol{x}})$, $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{B}}$ jest dualnie dopuszczalne w tym przypadku stosujemy algorytm dualny.

Kiedy dualny algorytm sympleks jest użyteczny?

- ("warm start") Po rozwiązaniu zadania prymalnego modyfikujemy wektor prawych stron $\boldsymbol{b}$. Wówczas wskaźniki optymalności pozostają niezmienione, ale nowe rozwiązanie bazowe $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}$ może zawierać składowe ujemne. Ponieważ mamy parę $(\pi, \tilde{\boldsymbol{x}})$, $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{B}}$ jest dualnie dopuszczalne w tym przypadku stosujemy algorytm dualny.
- ("warm start") Po rozwiązaniu zadania prymalnego dodajemy do tego zadania ograniczenie. Zmienna dualna odpowiadająca temu ograniczeniu ma wartość zero. Takie rozwiązanie dualne $\tilde{\pi}$ jest dopuszczalnym rozwiązaniem. Pojawi się również dodatkowa zmienna uzupełniająca x_{n+1} w zadaniu prymalnym, która może mieć ujemną wartość - ograniczenie dla $[\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{0}]$ musi zajść w postaci równości. Mamy więc poszerzone rozwiązanie dopuszczalne zadania prymalnego, które jest dualnie dopuszczalne. Zatem mamy parę $(\tilde{\pi}, \tilde{\boldsymbol{x}})$ i w tym przypadku stosujemy algorytm dualny.

Kiedy dualny algorytm sympleks jest użyteczny..?

$$\min \ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

$\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{c} \geqslant \boldsymbol{0}$

Kiedy dualny algorytm sympleks jest użyteczny..?

$$\min \; \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$\begin{cases} A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant 0, \end{cases}$$

$\boldsymbol{b} \geqslant 0$, $\boldsymbol{c} \geqslant 0$

$$\min \; \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$\begin{cases} -A\boldsymbol{x} + \mathbf{I}\,\boldsymbol{x}^s = -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant 0 \\ \boldsymbol{x}^s \geqslant 0, \end{cases}$$

$\boldsymbol{x}^s \in \mathbb{R}^m$ - zm. uzupełniających.

Kiedy dualny algorytm sympleks jest użyteczny..?

$$\min \ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

$\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{c} \geqslant \boldsymbol{0}$

$$\min \ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$
$$\begin{cases} -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{I}\,\boldsymbol{x}^s = -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}^s \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

$\boldsymbol{x}^s \in \mathbb{R}^m$ - zm. uzupełniających.

Baza początkowa jest postaci $\boldsymbol{B} = \mathbf{I}$ a $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^s]^T$, gdzie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^s = -\boldsymbol{b}$, jest rozwiązaniem bazowym prymalnie niedopuszczalnym. Odpowiadające rozwiązanie dualne jest postaci $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}$.

Kiedy dualny algorytm sympleks jest użyteczny..?

$$\min \ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

$$\min \ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$\begin{cases} -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{I}\,\boldsymbol{x}^s = -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}^s \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

$\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{c} \geqslant \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{x}^s \in \mathbb{R}^m$ - zm. uzupełniających.

Baza początkowa jest postaci $\boldsymbol{B} = \mathbf{I}$ a $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^s]^T$, gdzie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^s = -\boldsymbol{b}$, jest rozwiązaniem bazowym prymalnie niedopuszczalnym. Odpowiadające rozwiązanie dualne jest postaci $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}$.
Zatem $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}^s]^T$ jest dualnie dopuszczalne. Możemy również w tym przypadku zastosować dualny algorytm.

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książek

- Narsingh Deo, Janusz S. Kowalik, Maciej M. Sysło.
  Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku PASCAL.
  Wydawnictwa Naukowego PWN, 1999.
- Ireneusz Nykowski.
  Programowanie liniowe.
  PWE, Warszawa, 1980.