1 Dualny algorytm sympleks

Rozważmy zadanie prymalne w postaci standardowej

$$\min\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$\mathbb{X}_P = \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{1}$$

odpowiadające zadanie jest dualne jest postaci:

$$\max\ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi} \qquad\qquad \max\ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi}$$
$$\mathbb{X}_D = \begin{cases} \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m \end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{X}_D = \begin{cases} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\pi} \leqslant \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie wektor $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem m zmiennych decyzyjnych dualnych nieograniczonych co do znaku.

Prymalny algorytm sympleks, który wcześniej poznaliśmy, rozwiązujący zadanie prymalne w postaci standardowej (1) startuje od rozwiązania bazowego dopuszczalnego i w każdym kroku r konstruuje sąsiednie rozwiązanie bazowe dopuszczalne (wymienia kolumnę, zmienną, bazową z kolumną, zmienną, niebazową). Jeśli aktualne rozwiązanie bazowe dopuszczalne $\boldsymbol{x}^{(r)}$, tj. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(r)} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^{(r)} = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}}]^T$, gdzie $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0}$, a podmacierz $\boldsymbol{B}$ jest bazą, spełnia warunek optymalności

$$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}, \tag{3}$$

wówczas algorytm kończy działanie.

Przypomnijmy również parę faktów. Mianowicie, warunek optymalności (3) wyraża również dopuszczalność rozwiązania dualnego $\boldsymbol{\pi}^T = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T\boldsymbol{B}^{-1}$. Wiemy, że $\boldsymbol{c}^T = [c_1, \ldots, c_n]$, $\boldsymbol{z}^T = [z_1, \ldots, z_n]^T$, $z_k = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T\boldsymbol{y}^k = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_k$, a $\boldsymbol{A}_k$ jest k-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$. Zatem

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{z}^T \geqslant \boldsymbol{0}^T, \\ &\boldsymbol{c}^T - [(\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_1, \ldots, (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_n] \geqslant \boldsymbol{0}^T, \\ &\boldsymbol{c}^T - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T\boldsymbol{B}^{-1}[\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n] \geqslant \boldsymbol{0}^T, \\ &\boldsymbol{c}^T - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{0}^T, \\ &(\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T. \end{aligned}$$

Oznaczając $(\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T\boldsymbol{B}^{-1}$ przez $\boldsymbol{\pi}^T$ dostajemy rozwiązanie dopuszczalne zadania dualnego (2):

$$\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T. \tag{4}$$

Przyjmijmy (jak do tej pory), że pierwsze m kolumn to kolumny bazowe. Z twierdzenia o optymalności (zob. twierdzenie 2 wykłady nr 4 i 5) warunek optymalności (3) możemy zapisać bardziej szczegółowo:

$$\begin{cases} c_j - z_j = 0 & \text{dla } j = 1, \ldots, m, \\ c_j - z_j \geqslant 0 & \text{dla } j = m+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{5}$$

Równoważna postać jest następująca:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j = c_j & \text{dla } j = 1, \ldots, m, \\ \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \geqslant c_j & \text{dla } j = m+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{6}$$

Widzimy, że dla zmiennych bazowych (kolumn bazowych), rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\boldsymbol{x}$, odpowiadające im ograniczenia w zadaniu dualnym (2) zachodzą w postaci równości dla rozwiązania $\boldsymbol{\pi}^T$, a dla niebazowych zachodzą w postaci nierówności.

Podsumowując prymalny algorytm simpleks startuje od rozwiązania dopuszczalnego zadania prymalnego (1) i w każdym kroku zachowuje dopuszczalność konstruowanego rozwiązania dążąc, niejawnie, do dualnej dopuszczalności - równoważnie do spełnienia warunku optymalności (3), w którym zawarta jest informacja o rozwiązaniu dopuszczalnym zadania dualnego (zob. (4)). Natomiast *dualny* algorytm simpleks startuje od rozwiązania dopuszczalnego zadania dualnego (2) i w każdym kroku zachowuje dopuszczalność konstruowanego rozwiązania dualnego (spełniając warunek optymalności (3)) dążąc, niejawnie, do dopuszczalności prymalnej - co jest równoważne z istnieniem dopuszczalnego rozwiązania zadania prymalnego (1).

Przedstawmy powyższą ideę dualnego algorytmu sympleks bardziej szczegółowo. Niech $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego (1), które jest *dualnie dopuszczalne*, czyli spełnienia warunek optymalności (3), a co za tym idzie istnieje opowiadające rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{\pi}$ zadania dualnego (2). Jeśli $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \geqslant \boldsymbol{0}$, wówczas algorytm kończy działanie, ponieważ $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}$ jest *prymalnie dopuszczalne* i spełnienia warunek optymalności - jest dualnie dopuszczalne. W przeciwnym przypadku, gdy $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \ngeqslant \boldsymbol{0}$, tj. zawiera ujemne składowe, algorytm dąży ku dopuszczalności prymalnej rozwiązania bazowego $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}$, pozbywając się ujemnych składowych $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}$, zachowując jednocześnie jego optymalność (dualną dopuszczalność) i maksymalizując wartość dualnej funkcji celu $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi}$. Kończy działanie po skończonej liczbie kroków, gdy $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \geqslant \boldsymbol{0}$. Wtedy oczywiście zachodzi równość $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi}$. Z wniosku 1 z twierdzenia o słabej dualności (zob. wykład 6) wynika, że $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\pi}$ są, odpowiednio, rozwiązaniami optymalnymi zadania prymalnego i dualnego. Stąd w rzeczywistości algorytm dualny sympleks rozwiązuje zadanie prymalne. Porównanie idei prymalnego i dualnego algorytmu sympleks znajduje się w tabeli 1.

Krok dualnego algorytmu sympleks

Przedstawimy teraz krok dualnego algorytmu sympleks oraz pokażemy jak zmieniają się wskaźniki optymalności, jaka jest postać nowego rozwiąza-

Tabela 1: Porównanie idei prymalnego i dualnego algorytmu sympleks, gdzie $\boldsymbol{x^B} \geqslant \mathbf{0}$ oznacza prymalną dopuszczalność rozwiązania $\boldsymbol{x^B}$ a $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{z} \geqslant \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T$) jego dualną dopuszczalność.

algorytm prymalny			algorytm dualny		
$\boldsymbol{x^B} \geqslant \mathbf{0}$	$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{z} \ngeqslant \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \nleqslant \boldsymbol{c}^T$	$\boldsymbol{x^B} \ngeqslant \mathbf{0}$	$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{z} \geqslant \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T$
$\boldsymbol{x^B} \geqslant \mathbf{0}$	$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{z} \ngeqslant \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \nleqslant \boldsymbol{c}^T$	$\boldsymbol{x^B} \ngeqslant \mathbf{0}$	$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{z} \geqslant \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boxed{\boldsymbol{x^B} \geqslant \mathbf{0}}$	$\boxed{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{z} \geqslant \mathbf{0}}$	$\boxed{\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T}$	$\boxed{\boldsymbol{x^B} \geqslant \mathbf{0}}$	$\boxed{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{z} \geqslant \mathbf{0}}$	$\boxed{\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T}$
W każdym kroku: wybieramy kolumnę $\boldsymbol{A}_k$, która wchodzi do bazy $\boldsymbol{B}$; wybieramy kolumnę $\boldsymbol{A}_{i^*}$, która wychodzi z bazy $\boldsymbol{B}$.			W każdym kroku: wybieramy kolumnę $\boldsymbol{A}_{i^*}$, która wychodzi z bazy $\boldsymbol{B}$; wybieramy kolumnę $\boldsymbol{A}_k$, która wchodzi do bazy $\boldsymbol{B}$.		

nia dualnego oraz wartości funkcji celu zadania dualnego dla nowego rozwiązania dualnego.

Niech $\boldsymbol{x^B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego (1), które jest *dualnie dopuszczalne* (spełnienia warunek optymalności (3)) a $\boldsymbol{\pi}^T = (\boldsymbol{c^B})^T\boldsymbol{B}^{-1}$ będzie odpowiadającym rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego. Zakładamy, że pierwsze m kolumn to kolumny bazowe oraz kolumna i^* (zmienna) wychodzi z bazy, kolumna (zmienna) k wchodzi do bazy (kryterium wejścia kolumny (zmiennej) do bazy podamy później, kryterium wyjścia kolumny (zmiennej) jest związane z ujemnymi składowymi rozwiązania bazowego - pozbywamy się ujemnych składowych).

Niech $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \dots, \boldsymbol{B}_{i^*-1}, \boldsymbol{B}_{i^*}, \boldsymbol{B}_{i^*+1}, \dots, \boldsymbol{B}_m]$ będzie starą bazą a $\overline{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{B}_1, \dots, \boldsymbol{B}_{i^*-1}, \boldsymbol{B}_{i^*+1}, \dots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{A}_k]$ będzie nową bazą. Kolumna $\boldsymbol{B}_{i^*}$ wychodzi z bazy natomiast kolumna $\boldsymbol{A}_k$ wchodzi do bazy. Przedstawmy kolumnę niebazową $\boldsymbol{A}_k$ w starej bazie $\boldsymbol{B}$

$$y_1^k\boldsymbol{B}_1 + \cdots + y_{i^*-1}^k\boldsymbol{B}_{i^*-1} + y_{i^*}^k\boldsymbol{B}_{i^*} + y_{i^*+1}^k\boldsymbol{B}_{i^*+1} + \cdots + y_m^k\boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{A}_k \tag{7}$$

Przedstawmy kolumnę niebazową $\boldsymbol{A}_j$ w starej bazie

$$y_1^j\boldsymbol{B}_1 + \cdots + y_{i^*-1}^j\boldsymbol{B}_{i^*-1} + y_{i^*}^j\boldsymbol{B}_{i^*} + y_{i^*+1}^j\boldsymbol{B}_{i^*+1} + \cdots + y_m^j\boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{A}_j \tag{8}$$

Mnożąc (7) przez $\frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k}$, odejmujemy od (8) i otrzymujemy przedstawienie $\boldsymbol{P}_j$ nowej bazie

$$(y_1^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k}y_1^k)\boldsymbol{B}_1 + \cdots + (y_{i^*-1}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k}y_{i^*-1}^k)\boldsymbol{B}_{i^*-1} + (\mathbf{y}_{\mathbf{i^*}}^{\mathbf{j}} - \frac{\mathbf{y}_{\mathbf{i^*}}^{\mathbf{j}}}{\mathbf{y}_{\mathbf{i^*}}^{\mathbf{k}}}\mathbf{y}_{\mathbf{i^*}}^{\mathbf{k}})\boldsymbol{B}_{\mathbf{i^*}} +$$
$$(y_{i^*+1}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k}y_{i^*+1}^k)\boldsymbol{B}_{i^*+1} + \cdots + (y_m^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k}y_m^k)\boldsymbol{B}_m + \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k}\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_j$$

Współrzędne $\overline{\boldsymbol{y}}^j$ kolumny $\boldsymbol{A}_j$ w nowej bazie $\overline{\boldsymbol{B}}$ wyznaczamy ze wzoru

$$\overline{y}_i^j = \begin{cases} \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} & \text{dla } i = k \\ y_i^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_i^k & \text{dla } i \neq k \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Nowe wskaźniki optymalności są postaci:

$$\begin{aligned} c_j - \overline{z}_j = c_j - (\boldsymbol{c}^{\overline{\boldsymbol{B}}})^T \overline{\boldsymbol{y}}^j &= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T (\boldsymbol{y}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \boldsymbol{y}^k) - c_k \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \\ &= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^j + (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \boldsymbol{y}^k - c_k \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \\ &= c_j - z_j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} (c_k - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{y}^k) = c_j - z_j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} (c_k - z_k). \end{aligned}$$

Niech $\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k}$. Zależność miedzy starym a nowym wskaźnikiem optymalności wyraża się następująco:

$$c_j - \overline{z}_j = c_j - z_j - \Theta\, y_{i^*}^j. \tag{9}$$

Sprawdźmy teraz jak wygląda nowe rozwiązanie dualne

$$\begin{aligned} c_j - \overline{z}_j = c_j - \overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j = c_j - (\boldsymbol{c}^{\overline{\boldsymbol{B}}})^T \overline{\boldsymbol{B}}^{-1} \boldsymbol{A}_j &= c_j - z_j - \Theta\, y_{i^*}^j \\ &= c_j - (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_j - \Theta \text{ wiersz}_{i^*}(\boldsymbol{B}^{-1}) \boldsymbol{A}_j \\ &= c_j - (\boldsymbol{\pi}^T + \Theta \text{ wiersz}_{i^*}(\boldsymbol{B}^{-1})) \boldsymbol{A}_j. \end{aligned}$$

Zatem zależność między starym a nowym rozwiązaniem dualnym jest następująca:

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}^T = \boldsymbol{\pi}^T + \Theta\, \text{wiersz}_{i^*}(\boldsymbol{B}^{-1}). \tag{10}$$

Stąd dostajemy zależności wartości funkcji celu dla nowego i starego rozwiązania dualnego:

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{b} + \Theta\, \text{wiersz}_{i^*}(\boldsymbol{B}^{-1}) \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{b} + \Theta\, x_{i^*}^{\boldsymbol{B}}. \tag{11}$$

Sprawdźmy jeszcze jak wyglądają (5) dla kolumn k i i^* po wymianie

$$\begin{aligned} c_k - \overline{z}_k &= c_k - z_k - \Theta\, y_{i^*}^k = c_k - z_k - \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k} y_{i^*}^k = 0 \\ c_{i^*} - \overline{z}_{i^*} &= c_{i^*} - z_{i^*} - \Theta\, y_{i^*}^{i^*} = -\Theta, \end{aligned}$$

gdzie $c_{i^*} - z_{i^*} = 0$ (ponieważ kolumna i^* była bazowa), $y_{i^*}^{i^*} = 1$.

Podamy teraz kryterium wejścia kolumny do bazy. Musimy zachować dualną dopuszczalność, nowe rozwiązanie dualne $\overline{\pi}$ musi być dopuszczalne. Zatem wymuszamy warunek optymalności

$$c_j - \overline{z}_j \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, n.$$

Z (9) dostajemy

$$c_j - \overline{z}_j = c_j - z_j - \Theta\, y_{i^*}^j \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Zachowując powyższy warunek optymalności otrzymujemy kryterium wejścia do bazy:

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k} = \max\left\{ \frac{c_j - z_j}{y_{i^*}^j} \;:\; y_{i^*}^j < 0, j = m+1, \ldots, n \right\}.$$

Ponieważ stare wskaźniki optymalności są nieujemne $c_j - z_j \geqslant 0$, to $\Theta \leqslant 0$. Indeks ilorazu, k, dla którego jest przyjęte jest maksimum jest indeksem kolumny, która wchodzi do bazy.

Może pojawić się problem z istnieniem $y_{i^*}^j < 0$ dla $j = m+1, \ldots, n$ (dla $j = 1, \ldots, m$, $y_{i^*}^j \geqslant 0$), wówczas (12) jest spełniony dla $\Theta \in (-\infty, 0]$ (Θ ma nieograniczoną wartość). Wtedy nowe dopuszczalne rozwiązanie dualne $\overline{\pi}$ (10) nie jest skończone. Ponadto $x_{i^*}^{\boldsymbol{B}} < 0$ (pozbywamy się ujemnych składowych) wartość funkcji celu zadania dualnego (11) nie jest ograniczona z góry (maksymalizujemy ją). Zatem zadanie dualne jest nieograniczone a prymalne sprzeczne (zob. wniosek 2, wykład 6) - algorytm kończy działanie.

Szkic dualnego algorytmu sympleks

Niech $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego (1), które jest *dualnie dopuszczalne* (spełnienia warunek optymalności (3)), a co za tym idzie istnieje rozwiązanie dopuszczalne zadania dualnego postaci $\boldsymbol{\pi}^T = (\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{B}})^T \boldsymbol{B}^{-1}$.

Krok 1 Jeżeli $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \geqslant \boldsymbol{0}$ jest rozwiązaniem bazowym prymalnie dopuszczalnym (wszystkie składowe są nieujemne), to rozwiązanie $\boldsymbol{x}^T = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{0}]^T$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania prymalnego (1), STOP.

W przeciwnym przypadku wybierz zmienną x_{i^*} (kolumnę $\boldsymbol{B}_{i^*}$), która wychodzi z bazy, np.

$$x_{i^*} = \min\{x_i^{\boldsymbol{B}} \;:\; x_i^{\boldsymbol{B}} < 0, i = 1, \ldots, m\}.$$

Krok 2 Wybierz zmienną x_k (kolumnę $\boldsymbol{A}_k$), która wchodzi do bazy

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k} = \max\left\{ \frac{c_j - z_j}{y_{i^*}^j} \;:\; y_{i^*}^j < 0, j = m+1, \ldots, n \right\}.$$

Jeśli $y_{i^*}^j \geqslant 0$ dla $j = m+1, \ldots, n$, to zadanie dualne jest nieograniczone (nie skończonego rozwiązania). Zatem zadanie prymalne jest sprzeczne, STOP.

Krok 3 Uaktualnij:

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{B}} &:= [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_{i^*-1}, \boldsymbol{B}_{i^*+1}, \ldots, \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{A}_k],\\ \overline{\boldsymbol{\pi}}^T &:= \boldsymbol{\pi}^T + \Theta\, \text{wiersz}_{i^*}(\boldsymbol{B}^{-1}),\\ \overline{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{B}} &:= \overline{\boldsymbol{B}}^{-1}\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

Krok 4 Podstaw:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &:= \overline{\boldsymbol{B}},\\ \boldsymbol{\pi} &:= \overline{\boldsymbol{\pi}},\\ \boldsymbol{x} &:= \overline{\boldsymbol{x}}.\end{aligned}$$

Idź do Kroku 1.

Kiedy dualny algorytm sympleks jest użyteczny?

Dualny algorytm sympleks jest użyteczny, kiedy dysponujemy parą rozwiązań, w której $\boldsymbol{\pi}$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego a $\boldsymbol{x}$ jest prymalnie niedopuszczalne (ma ujemne składowe). Poniżej niektóre ważne z praktycznego punktu widzenia przypadki.

- ("warm start") Po rozwiązaniu zadania prymalnego (1) modyfikujemy wektor prawych stron $\boldsymbol{b}$. Wówczas wskaźniki optymalności pozostają niezmienione (3), ale nowe rozwiązanie bazowe $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}$ może zawierać składowe ujemne. Ponieważ mamy parę $(\boldsymbol{\pi}, \tilde{\boldsymbol{x}})$, $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{B}}$ jest dualnie dopuszczalne w tym przypadku stosujemy algorytm dualny.

- ("warm start") Po rozwiązaniu zadania prymalnego (1) dodajemy do tego zadania ograniczenie. Zmienna dualna odpowiadająca temu ograniczeniu ma wartość zero. Takie rozwiązanie dualne $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ jest dopuszczalnym rozwiązaniem. Pojawi się również dodatkowa zmienna uzupełniająca x_{n+1} w zadaniu prymalnym, która może mieć ujemną wartość - ograniczenie dla $[\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{0}]$ musi zajść w postaci równości. Mamy więc poszerzone rozwiązanie dopuszczalne zadania prymalnego, które jest dualnie dopuszczalne. Zatem mamy parę $(\tilde{\boldsymbol{\pi}}, \tilde{\boldsymbol{x}})$ i w tym przypadku stosujemy algorytm dualny.

- Załóżmy, że mamy zadanie prymalne w postaci kanonicznej, w którym $\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{c} \geqslant \boldsymbol{0}$

$$\min\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}.\end{cases}$$

Doprowadzamy to zadanie do postaci standardowej przez wprowadzenie zmiennych uzupełniających:

$$\min\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$\begin{cases} -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{I}\,\boldsymbol{x}^s = -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}^s \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol{x}^s \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem zmiennych uzupełniających. W tym przypadku baza początkowa jest postaci $\boldsymbol{B} = \mathbf{I}$ a $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^s]^T$, gdzie $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^s = -\boldsymbol{b}$, jest rozwiązaniem bazowym prymalnie niedopuszczalnym. Odpowiadające rozwiązanie dualne jest postaci $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$. Zatem $[\mathbf{0}, \boldsymbol{x}^s]^T$ jest dualnie dopuszczalne. Możemy również w tym przypadku zastosować dualny algorytm.

Uwagi na temat treści wykładu

Część wykładu została przygotowana na podstawie książek [1, 2].

Literatura

[1] Narsingh Deo, Janusz S. Kowalik, Maciej M. Sysło. *Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku PASCAL.* Wydawnictwa Naukowego PWN, 1999.

[2] Ireneusz Nykowski. *Programowanie liniowe.* PWE, Warszawa, 1980.