Metody optymalizacji
Wykład nr 9 cd.

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska

Problem najkrótszej ścieżki

Dane: Graf skierowany spójny $G = (V, E)$, gdzie V jest zbiorem wierzchołków, $|V| = n$, E jest zbiorem łuków, $|E| = m$, dwa różnione wierzchołki $s \in V$ (źródło) i $t \in V$ (ujście), nieujemne koszty łuków $c_e \in \mathbb{Z}_+$, $e \in E$.
Zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest następującej postaci:

$$\mathbb{X} = \{p \,:\, p \text{ jest ścieżką od } s \text{ do } t \text{ w grafie } G\}.$$

Funkcja celu (kosztu) $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Z}_+$, $f(p) = \sum_{e \in p} c_e$.

Wyjście: Ścieżka p^* takie, że

$$f(p^*) = \min_{p \in \mathbb{X}} f(p).$$

Model programowania liniowego

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \left.\begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} |V| \\ \boldsymbol{x} &\geqslant \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{|E|}$ jest wektorem $|E|$ zmiennych decyzyjnych, których interpretacja jest następująca:

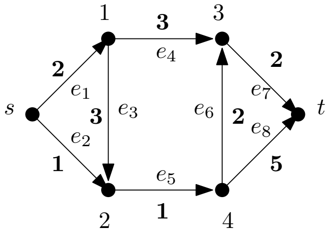
$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{jeśli łuk } e \text{ należy do ścieżki } p^* \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \qquad e \in E$$

Model programowania liniowego...

Macierz $\boldsymbol{A} \in \{-1, 0, 1\}^{|V| \times |E|}$ jest macierzą incydencji grafu G.

Model programowania liniowego...

Macierz $\boldsymbol{A} \in \{-1, 0, 1\}^{|V| \times |E|}$ jest macierzą incydencji grafu G.
Na przykład:



$\boldsymbol{A}$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
s	1	1	0	0	0	0	0	0
t	0	0	0	0	0	0	-1	-1
1	-1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	-1	-1	0	1	0	0	0
3	0	0	0	-1	0	-1	1	0
4	0	0	0	0	-1	1	0	1

Model programowania liniowego...

Zadanie (1) jest szczególnym przypadkiem sformułowania programowania liniowego dla problemu najtańszego przepływu. Tutaj

- podaż w wierzchołku s jest równa 1 i popyt w wierzchołku t jest równy 1,
- ograniczenia zadania (1) zachowują przepływ.

Model programowania liniowego...

Zadanie (1) jest szczególnym przypadkiem sformułowania programowania liniowego dla problemu najtańszego przepływu. Tutaj

- podaż w wierzchołku s jest równa 1 i popyt w wierzchołku t jest równy 1,
- ograniczenia zadania (1) zachowują przepływ.

Okazuje się, że zachowanie przepływu (czyli przepływu 1 od s do t) można wyrazić za pomocą $|V| - 1$ warunków (jeden warunek jest zbędny - ten związany z wierzchołkiem t).

Zadaniem prymalne (**P**)

Zadanie prymalne (sformułowanie programowania liniowego problemu najkrótszej ścieżki):

$$
(\mathbf{P}) \qquad
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \left.\begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} |V| - 1 \\
& \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Zadaniem dualne (D)

Zadanie dualne do zadania (**P**) ma postać

$$
(\mathbf{D}) \qquad \begin{array}{lrll}
\max & \pi_s - \pi_t & = \pi_s & \\
 & \pi_i - \pi_j & \leqslant c_{ij} & \quad e = (i,j) \in E \\
 & \pi_t & = 0 & \\
 & \boldsymbol{\pi} & \in \mathbb{R}^{|V|}. &
\end{array}
$$

Zmienna π_t ma wartość zero, ponieważ ograniczenie odpowiadające wierzchołkowi t w zadaniu (**P**) zostało usunięte. Zauważmy również, że w (**D**) zmienne dualne odpowiadają wierzchołkom grafu G.

Algorytm prymalno-dualny

Zastosujmy algorytm prymalno-dualny do problemu najkrótszej ścieżki - dla postaci zadań (**P**) i (**D**).

Algorytm prymalno-dualny

Zastosujmy algorytm prymalno-dualny do problemu najkrótszej ścieżki - dla postaci zadań (**P**) i (**D**).

- $c_e \geqslant 0$, $e \in E$, to pierwszym rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego (**D**) jest rozwiązanie $\pi = \mathbf{0}$.

Algorytm prymalno-dualny

Zastosujmy algorytm prymalno-dualny do problemu najkrótszej ścieżki - dla postaci zadań (**P**) i (**D**).

- $c_e \geqslant 0$, $e \in E$, to pierwszym rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego (**D**) jest rozwiązanie $\pi = \mathbf{0}$.
- Szukamy rozwiązania prymalnego $\boldsymbol{x}$ zadania (**P**) mające składowe $x_{e=(i,j)} = 0$ tam, gdzie $\pi_i - \pi_j < c_{ij}$, czyli dążyli do spełnienia warunków twierdzenia o różnicach dopełniających.

Algorytm prymalno-dualny

Zastosujmy algorytm prymalno-dualny do problemu najkrótszej ścieżki - dla postaci zadań (**P**) i (**D**).

- $c_e \geqslant 0$, $e \in E$, to pierwszym rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego (**D**) jest rozwiązanie $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$.
- Szukamy rozwiązania prymalnego $\boldsymbol{x}$ zadania (**P**) mające składowe $x_{e=(i,j)} = 0$ tam, gdzie $\pi_i - \pi_j < c_{ij}$, czyli dążyli do spełnienia warunków twierdzenia o różnicach dopełniających.
  W tym celu dla ustalonego rozwiązania $\boldsymbol{\pi}$ wyznaczamy zbiór indeksów ograniczeń J w (**D**), które zaszły w postaci równości, tj.

$$J = \{e = (i,j) \in E \; : \; \pi_i - \pi_j = c_{ij}\}.$$

Zadanie ograniczone prymalne (**RP**)

Wspomniany $\boldsymbol{x}$, jeśli istnieje, jest rozwiązaniem optymalnym zadania ograniczonego prymalnego (**RP**):

$$
(\mathbf{RP}) \qquad
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in [|V|-1]} x_i^A \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^A = \left.\begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} |V| - 1 \\
& x_e \geqslant 0 && e \in J \\
& x_e = 0 && e \notin J \\
& x_i^A \geqslant 0 && i \in [|V| - 1],
\end{aligned}
$$

gdzie $\boldsymbol{x}^A \in \mathbb{R}^{|V|-1}$ jest wektorem sztucznych zmiennych.

Zadanie dualne do (**RP**) - zadanie (**DRP**)

Zadanie dualne do (**RP**) jest postaci:

$$
(\mathbf{DRP}) \qquad
\begin{array}{lrll}
\max & \pi_s - \pi_t & = \pi_s & \\
 & \pi_i - \pi_j & \leqslant 0 & e = (i,j) \in J \\
 & \pi_i & \leqslant 1 & i \in V \setminus \{t\} \\
 & \pi_t & = 0 & \\
 & \boldsymbol{\pi} & \in \mathbb{R}^{|V|} &
\end{array}
$$

Niejawne rozwiązywanie zadania (**RP**)

- Zadanie (**RP**), czyli poszukiwanie $\boldsymbol{x}$ dla ustalonego π, będziemy rozwiązywali niejawnie rozwiązując zadanie (**DRP**) (korzystając z zależności między zadaniami prymalnym i dualnym).
  Zadanie (**DRP**) sprowadza się one do problemu osiągalności jakiegoś podzbioru wierzchołków z ustalonego wierzchołka w grafie G.

Niejawne rozwiązywanie zadania (**RP**)

- Zadanie (**RP**), czyli poszukiwanie $\boldsymbol{x}$ dla ustalonego $\boldsymbol{\pi}$, będziemy rozwiązywali niejawnie rozwiązując zadanie (**DRP**) (korzystając z zależności między zadaniami prymalnym i dualnym).
  Zadanie (**DRP**) sprowadza się one do problemu osiągalności jakiegoś podzbioru wierzchołków z ustalonego wierzchołka w grafie G.
- Zauważmy, że $\pi_s \leqslant 1$ oraz funkcja celu (**DRP**) jest postaci π_s, którą maksymalizujemy. Zatem próbujemy skonstruować rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{\pi}$ ze składową $\pi_s = 1$. Jeżeli nie istnieje ścieżka od s do t w grafie G złożona z łuków należących do J, wtedy $\boldsymbol{\pi}$ konstruujemy przez propagację 1 do wszystkich wierzchołków osiągalnych z s (ale nie incydentnych z łukami należącymi do J) spełniając jednocześnie ograniczenia $\pi_i - \pi_j \leqslant 0$ zadania (**DRP**).

Niejawne rozwiązywanie zadania (**RP**)

Łatwo zauważyć, że rozwiązanie optymalne $\overline{\pi}$ zadania (**DRP**) jest postaci:

$$\overline{\pi}_i := \begin{cases} 0 & \text{jeśli wierzchołek } t \text{ jest osiągalny z wierzchołka } i \\ & \text{ścieżką złożoną z łuków należących do } J \qquad i \in V. \\ 1 & \text{ w przeciwnym przypadki} \end{cases}$$

Niejawne rozwiązywanie zadania (**RP**)

Łatwo zauważyć, że rozwiązanie optymalne $\overline{\pi}$ zadania (**DRP**) jest postaci:

$$\overline{\pi}_i := \begin{cases} 0 & \text{jeśli wierzchołek } t \text{ jest osiągalny z wierzchołka } i \\ & \text{ścieżką złożoną z łuków należących do } J \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadki} \end{cases} \qquad i \in V.$$

Jeśli w rozwiązaniu optymalnym $\overline{\pi}$ składowa $\pi_s = 0$ (wartość funkcji celu zadania (**DRP**) jest równa zero), to optymalna wartość funkcji celu zadania (**RP**) jest równa zero.

Niejawne rozwiązywanie zadania (**RP**)

Łatwo zauważyć, że rozwiązanie optymalne $\overline{\pi}$ zadania (**DRP**) jest postaci:

$$\overline{\pi}_i := \begin{cases} 0 & \text{jeśli wierzchołek } t \text{ jest osiągalny z wierzchołka } i \\ & \text{ścieżką złożoną z łuków należących do } J \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadki} \end{cases} \qquad i \in V.$$

Jeśli w rozwiązaniu optymalnym $\overline{\pi}$ składowa $\pi_s = 0$ (wartość funkcji celu zadania (**DRP**) jest równa zero), to optymalna wartość funkcji celu zadania (**RP**) jest równa zero. Zatem istnieje rozwiązanie prymalne $\boldsymbol{x}$ zadania (**P**) mające składowe $x_{e=(i,j)} = 0$ tam, gdzie $\pi_i - \pi_j < c_{ij}$ w zadaniu (**D**).

Niejawne rozwiązywanie zadania (**RP**)

Łatwo zauważyć, że rozwiązanie optymalne $\overline{\pi}$ zadania (**DRP**) jest postaci:

$$\overline{\pi}_i := \begin{cases} 0 & \text{jeśli wierzchołek } t \text{ jest osiągalny z wierzchołka } i \\ & \text{ścieżką złożoną z łuków należących do } J \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadki} \end{cases} \qquad i \in V.$$

Jeśli w rozwiązaniu optymalnym $\overline{\pi}$ składowa $\pi_s = 0$ (wartość funkcji celu zadania (**DRP**) jest równa zero), to optymalna wartość funkcji celu zadania (**RP**) jest równa zero. Zatem istnieje rozwiązanie prymalne $\boldsymbol{x}$ zadania (**P**) mające składowe $x_{e=(i,j)} = 0$ tam, gdzie $\pi_i - \pi_j < c_{ij}$ w zadaniu (**D**). Z twierdzenia o różnicach dopełniających $\boldsymbol{x}$ jest optymalne dla (**P**) (zadania najkrótszej ścieżki), a ścieżka z s do t złożona z łuków należących do J jest najkrótsza w G - STOP!

Nowe rozwiązanie π zadania dualnego (**D**)

W przeciwnym przypadku poprawiamy rozwiązanie π zadania dualnego (**D**):

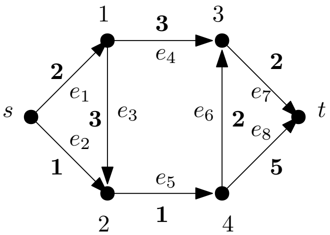
$$\boldsymbol{\pi} := \boldsymbol{\pi} + \Theta_1 \overline{\boldsymbol{\pi}},$$

gdzie Θ_1 wyznaczamy następująco:

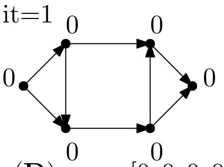
$$\Theta_1 = \min\{c_{ij} - (\pi_i - \pi_j) \ : \ e = (i,j) \notin J, \overline{\pi}_i - \overline{\pi}_j > 0\}.$$

Można zauważyć, rozwiązanie problemu najkrótszej ścieżki w grafie G zostało sprowadzone do iteracyjnego rozwiązywania problemu osiągalności w tym grafie.

Przykład



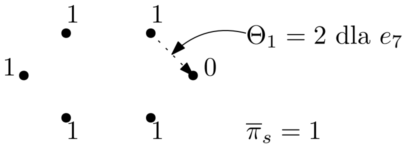
Rozwiązania dualne π i $\overline{\pi}$, odpowiednio, zadań (**D**) i (**DRP**) znajdują się nad wierzchołkami grafów.



$(\mathbf{D}) : \boldsymbol{\pi} = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$

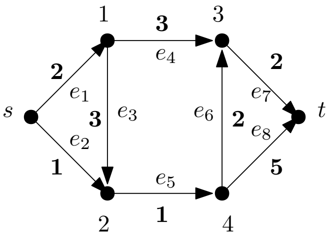
$J = \emptyset$

$\Rightarrow$ $\Rightarrow$

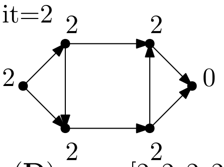


$(\mathbf{DRP}) : \overline{\boldsymbol{\pi}} = [1, 1, 1, 1, 1, 0]$

Przykład

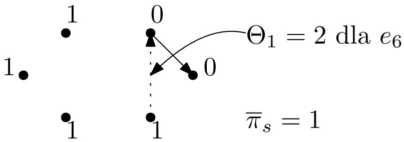


Rozwiązania dualne $\boldsymbol{\pi}$ i $\overline{\boldsymbol{\pi}}$, odpowiednio, zadań (**D**) i (**DRP**) znajdują się nad wierzchołkami grafów.



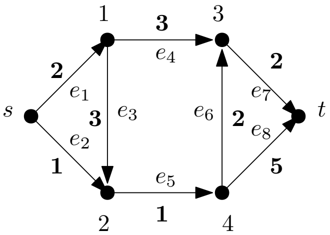
$(\mathbf{D}) : \boldsymbol{\pi} = [2, 2, 2, 2, 2, 0]$

$\Rightarrow$ $J = \{e_7\}$ $\Rightarrow$

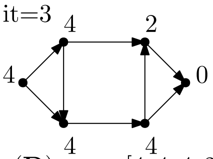


$(\mathbf{DRP}) : \overline{\boldsymbol{\pi}} = [1, 1, 1, 0, 1, 0]$

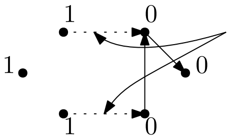
Przykład



Rozwiązania dualne π i $\overline{\pi}$, odpowiednio, zadań (**D**) i (**DRP**) znajdują się nad wierzchołkami grafów.



$\Rightarrow$ $J = \{e_7, e_6\}$ $\Rightarrow$



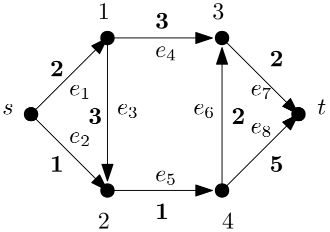
$\Theta_1 = 1$ dla e_6, e_5

$\overline{\pi}_s = 1$

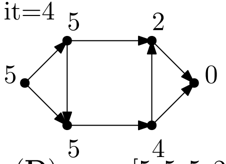
$(\mathbf{D}) : \boldsymbol{\pi} = [4, 4, 4, 2, 4, 0]$

$(\mathbf{DRP}) : \overline{\boldsymbol{\pi}} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$

Przykład

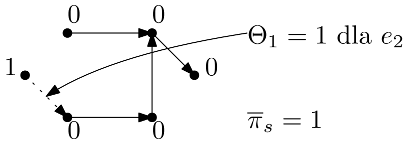


Rozwiązania dualne π i $\overline{\pi}$, odpowiednio, zadań (**D**) i (**DRP**) znajdują się nad wierzchołkami grafów.



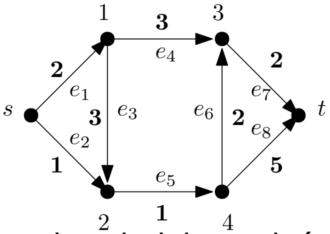
$(\mathbf{D}) : \boldsymbol{\pi} = [5, 5, 5, 2, 4, 0]$

$\Rightarrow$ $J = \{e_7, e_6, e_4, e_5\}$ $\Rightarrow$



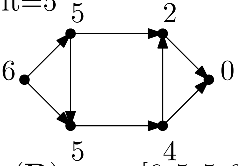
$(\mathbf{DRP}) : \overline{\boldsymbol{\pi}} = [1, 0, 0, 0, 0, 0]$

Przykład

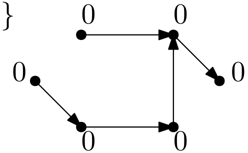


Rozwiązania dualne π i $\overline{\pi}$, odpowiednio, zadań (**D**) i (**DRP**) znajdują się nad wierzchołkami grafów.

it=5



$\Rightarrow$ $J = \{e_7, e_6, e_4, e_5, e_2\}$ $\Rightarrow$



STOP

$\overline{\pi}_s = 0$

$(\mathbf{D}) : \boldsymbol{\pi} = [6, 5, 5, 2, 4, 0]$

$(\mathbf{DRP}) : \overline{\boldsymbol{\pi}} = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$

Własności algorytmu

Zdefiniujmy w dowolnym momencie działania algorytmu następujący zbiór wierzchołków:

$$\begin{aligned} W &= \{i \in V : t \text{ jest osiągalny z } i \text{ ścieżką złożoną z łuków z } J\} \\ &= \{i \in V : \overline{\pi}_i = 0\}. \end{aligned}$$

Własność

Wartość zmiennej π_i nie ulega zmianie od momentu, gdy wierzchołek i został dołączony do W aż do momentu zakończenia algorytmu.

Własności algorytmu

Zdefiniujmy w dowolnym momencie działania algorytmu następujący zbiór wierzchołków:

$$\begin{aligned} W &= \{i \in V : t \text{ jest osiągalny z } i \text{ ścieżką złożoną z łuków z } J\} \\ &= \{i \in V : \overline{\pi}_i = 0\}. \end{aligned}$$

Własność

Wartość zmiennej π_i nie ulega zmianie od momentu, gdy wierzchołek i został dołączony do W aż do momentu zakończenia algorytmu.

Wynika od z faktu, że $\overline{\pi}_i = 0$ i $\boldsymbol{\pi} := \boldsymbol{\pi} + \Theta_1 \overline{\boldsymbol{\pi}}$.

Własności algorytmu

Zdefiniujmy w dowolnym momencie działania algorytmu następujący zbiór wierzchołków:

$$\begin{aligned} W &= \{i \in V : t \text{ jest osiągalny z } i \text{ ścieżką złożoną z łuków z } J\} \\ &= \{i \in V : \overline{\pi}_i = 0\}. \end{aligned}$$

Własność

Wartość zmiennej π_i nie ulega zmianie od momentu, gdy wierzchołek i został dołączony do W aż do momentu zakończenia algorytmu.

Wynika od z faktu, że $\overline{\pi}_i = 0$ i $\boldsymbol{\pi} := \boldsymbol{\pi} + \Theta_1 \overline{\boldsymbol{\pi}}$.
Wartość zmiennej π_i jest równa długości najkrótszej ścieżki od i do t.

Własności algorytmu...

Własność

Jeżeli łuk $e = (i, j)$ *został dołączony do* J *to nigdy nie opuści tego zbioru.*

Własności algorytmu...

Własność

Jeżeli łuk $e = (i, j)$ *został dołączony do* J *to nigdy nie opuści tego zbioru.*

Rozwiązanie dualne modyfikujemy następująco: $\pi := \pi + \Theta_1 \, \overline{\pi}$.

Własności algorytmu...

Własność

Jeżeli łuk $e = (i, j)$ został dołączony do J to nigdy nie opuści tego zbioru.

Rozwiązanie dualne modyfikujemy następująco: $\pi := \pi + \Theta_1 \overline{\pi}$.
Niech π' będzie zmodyfikowanym rozwiązaniem, $\pi' := \pi + \Theta_1 \overline{\pi}$.
Zauważ, że dla $e = (i, j) \in J$ mamy $\overline{\pi}_i = 0$ i $\overline{\pi}_j = 0$. Zatem jeśli $\pi_i - \pi_j = c_{ij}$, to również $\pi'_i - \pi'_j = c_{ij}$.

Własności algorytmu...

Własność

Algorytm wykonuje skończoną liczbę kroków.

Własności algorytmu...

Własność

Algorytm wykonuje skończoną liczbę kroków.

W każdej iteracji co najmniej jeden wierzchołek zostaje dodany do W.
Stąd liczba iteracji wynosi co najwyżej $|V|$.

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książki

Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz.
Combinatorial optimization: algorithms and complexity.
Dover Publications Inc., 1998.