1 Algorytm prymalno-dualny dla problemu najkrótszej ścieżki

Rozważmy problem najkrótszej ścieżki, tj. problem, w którym dane są: skierowany graf $G = (V, E)$, gdzie V jest zbiorem wierzchołków, $|V| = n$, E jest zbiorem łuków, $|E| = m$, dwa różnione wierzchołki $s \in V$ (źródło) i $t \in V$ (ujście), nieujemne koszty łuków c_e, $e \in E$. W problemie tym szukamy ścieżki od s do t w grafie G, której całkowity koszt jest najmniejszy.

Dla powyższego problemu można podać model programowania liniowego (zob. również notatki z laboratorium):

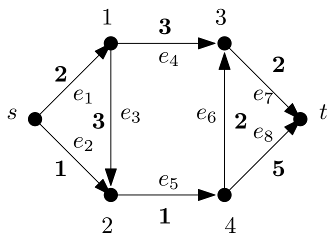
$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \left.\begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} |V| \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{|E|}$ jest wektorem $|E|$ zmiennych decyzyjnych, których interpretacja jest następująca:

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{jeśli łuk } e \text{ należy do ścieżki} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad e \in E$$

a macierz $\boldsymbol{A} \in \{-1, 0, 1\}^{|V| \times |E|}$ jest macierzą incydencji grafu G (zob. rysunek 1). Wiersz, w którym w wektorze prawych stron jest $+1$ odpowiada wierzchołkowi s a wiersz, w którym jest -1 odpowiada wierzchołkowi t. Binarność zmiennych decyzyjnych x_e wynika z faktu, że każde rozwiązanie bazowe dopuszczalne zadania (1) (w szczególności optymalne) ma wszystkie składowe binarne. Fakt ten wyjaśnimy w kolejnych wykładach. Zatem takie rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ wyznacza ścieżkę od od s do t w grafie G. Stąd zadanie (1) modeluje nasz problem najkrótszej ścieżki.

Zadanie (1) jest szczególnym przypadkiem sformułowania programowania liniowego dla problemu najtańszego przepływu. Tutaj podaż w wierzchołku s jest równa 1 i popyt w wierzchołku t jest równy 1. Ograniczenia zadania (1) zachowują przepływ. Okazuje się, że zachowanie przepływu (czyli przepływu 1 od s do t) można wyrazić za pomocą $|V| - 1$ warunków (jeden warunek jest zbędny - ten związany z wierzchołkiem t). Zatem (1) ma teraz postać. Postać tę będziemy nazywali *zadaniem prymalnym* (sformułowanie



$\boldsymbol{A}$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
s	1	1	0	0	0	0	0	0
t	0	0	0	0	0	0	−1	−1
1	−1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	−1	−1	0	1	0	0	0
3	0	0	0	−1	0	−1	1	0
4	0	0	0	0	−1	1	0	1

Rysunek 1: Graf z kosztami łuków (tłusty druk) i opowiadająca macierz incydencji $\boldsymbol{A}$.

programowania liniowego problemu najkrótszej ścieżki):

$$
(\mathbf{P}) \qquad \begin{aligned} \min \ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \left.\begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} |V|-1 \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2}
$$

Zadanie dualne do zadania $(\mathbf{P})$ ma postać

$$
(\mathbf{D}) \qquad \begin{aligned} \max \ & \pi_s - \pi_t && = \pi_s \\ & \pi_i - \pi_j && \leqslant c_{ij} \qquad e=(i,j) \in E \\ & \pi_t && = 0 \\ & \boldsymbol{\pi} && \in \mathbb{R}^{|V|}. \end{aligned} \tag{3}
$$

Zmienna π_t ma wartość zero, ponieważ ograniczenie odpowiadające wierzchołkowi t w zadaniu $(\mathbf{P})$ zostało usunięte. Zauważmy również, że w $(\mathbf{D})$ zmienne dualne odpowiadają wierzchołkom grafu G.

Zastosujmy teraz algorytm prymalno-dualny (zob. wykład 9) do problemu najkrótszej ścieżki - mamy postaci zadań $(\mathbf{P})$ i $(\mathbf{D})$. Ponieważ koszty łuków są nieujemne, to pierwszym rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego $(\mathbf{D})$ jest rozwiązanie $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$. Będziemy teraz starali się znaleźć rozwiązanie prymalne $\boldsymbol{x}$ zadania $(\mathbf{P})$ mające składowe $x_{e=(i,j)} = 0$ tam, gdzie $\pi_i - \pi_j < c_{ij}$, czyli dążyli do spełnienia warunków twierdzenia o różnicach dopełniających. W tym celu dla ustalonego rozwiązania $\boldsymbol{\pi}$ wyznaczamy zbiór indeksów ograniczeń J w $(\mathbf{D})$, które zaszły w postaci równości, tj.

$$J = \{e = (i,j) \in E \,:\, \pi_i - \pi_j = c_{ij}\}.$$

Wspomniany $\boldsymbol{x}$, jeśli istnieje, jest rozwiązaniem optymalnym zadania ograniczonego prymalnego (**RP**):

$$
(\mathbf{RP}) \qquad
\begin{array}{ll}
\min \displaystyle\sum_{i\in[|V|-1]} x_i^A & \\
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^A = \left.\begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} |V|-1 & \\
x_e \geqslant 0 & e \in J \\
x_e = 0 & e \notin J \\
x_i^A \geqslant 0 & i \in [|V|-1],
\end{array}
\tag{4}
$$

gdzie $\boldsymbol{x}^A \in \mathbb{R}^{|V|-1}$ jest wektorem sztucznych zmiennych. Zadanie dualne do (**RP**) jest postaci:

$$
(\mathbf{DRP}) \qquad
\begin{array}{rll}
\max \ \pi_s - \pi_t & = \pi_s & \\
\pi_i - \pi_j & \leqslant 0 & e = (i,j) \in J \\
\pi_i & \leqslant 1 & i \in V \setminus \{t\} \\
\pi_t & = 0 & \\
\boldsymbol{\pi} & \in \mathbb{R}^{|V|} &
\end{array}
\tag{5}
$$

Zadanie (**RP**), czyli poszukiwanie $\boldsymbol{x}$ dla ustalonego $\boldsymbol{\pi}$, będziemy rozwiązywali niejawnie rozwiązując zadanie (**DRP**) (korzystając z zależności między zadaniami prymalnym i dualnym). Okazuje się, że zadanie (**DRP**) jest łatwe do rozwiązanie sprowadza się one do problemu osiągalności jakiegoś podzbioru wierzchołków z ustalonego wierzchołka w grafie G, czyli tutaj będziemy stosowali algorytm grafowy zamiast algorytmu sympleks.

Zauważmy, że $\pi_s \leqslant 1$ oraz funkcja celu (**DRP**) jest postaci π_s, którą maksymalizujemy. Zatem próbujemy skonstruować rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{\pi}$ ze składową $\pi_s = 1$. Jeżeli nie istnieje ścieżka od s do t w grafie G złożona z łuków należących do J, wtedy $\boldsymbol{\pi}$ konstruujemy przez propagację 1 do wszystkich wierzchołków osiągalnych z s (ale nie incydentnych z łukami należącymi do J) spełniając jednocześnie ograniczenia $\pi_i - \pi_j \leqslant 0$ zadania (**DRP**). Łatwo zauważyć, że rozwiązanie optymalne $\overline{\boldsymbol{\pi}}$ zadania (**DRP**) jest postaci:

$$
\overline{\pi}_i := \begin{cases} 0 & \text{jeśli wierzchołek } t \text{ jest osiągalny z wierzchołka } i \\ & \text{ścieżką złożoną z łuków należących do } J \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadki} \end{cases} \qquad i \in V.
$$

Jeśli w rozwiązaniu optymalnym $\overline{\boldsymbol{\pi}}$ zadania (**DRP**) składowa $\pi_s = 0$ (wartość funkcji celu zadania (**DRP**) jest równa zero), to optymalna wartość funkcji celu zadania (**RP**) jest równa zero. Zatem istnieje rozwiązanie prymalne $\boldsymbol{x}$ zadania (**P**) mające składowe $x_{e=(i,j)} = 0$ tam, gdzie $\pi_i - \pi_j < c_{ij}$

w zadaniu (**D**). Z twierdzenia o różnicach dopełniających $\boldsymbol{x}$ jest optymalne dla (**P**) (zadania najkrótszej ścieżki), a ścieżka z s do t złożona z łuków należących do J jest najkrótsza w G. W tym przypadku algorytm kończy działanie.

W przeciwnym przypadku poprawiamy rozwiązanie $\boldsymbol{\pi}$ zadania dualnego (**D**), mianowicie:

$$\boldsymbol{\pi} := \boldsymbol{\pi} + \Theta_1 \overline{\boldsymbol{\pi}}, \tag{6}$$

gdzie Θ_1 wyznaczamy następująco:

$$\Theta_1 = \min\{c_{ij} - (\pi_i - \pi_j) \,:\, e = (i,j) \notin J, \overline{\pi}_i - \overline{\pi}_j > 0\}.$$

Można zauważyć, rozwiązanie problemu najkrótszej ścieżki w grafie G zostało sprowadzone do iteracyjnego rozwiązywania problemu osiągalności w tym grafie. Ilustracja algorytmu prymalno-dualnego przedstawiona jest na rysunku 2.

Przedstawmy teraz oczywiste własności powyższego algorytmu. Zdefiniujmy w dowolnym momencie działania algorytmu następujący zbiór wierzchołków:

$$\begin{aligned} W &= \{i \in V \,:\, t \text{ jest osiągalny z } i \text{ ścieżką złożoną z łuków z } J\} \\ &= \{i \in V \,:\, \overline{\pi}_i = 0\}. \end{aligned}$$

Pierwsza własność: wartość zmiennej π_i nie ulega zmianie od momentu, gdy wierzchołek i został dołączony do W aż do momentu zakończenia algorytmu, co wynika od z faktu, że $\overline{\pi}_i = 0$ w tym okresie i równania (6). Druga własność: jeżeli łuk $e = (i,j)$ został dołączony do J to nigdy nie opuści tego zbioru. Rozwiązanie dualne modyfikujemy według wzoru (6). Niech $\boldsymbol{\pi}'$ będzie zmodyfikowanym rozwiązaniem, $\boldsymbol{\pi}' := \boldsymbol{\pi} + \Theta_1 \overline{\boldsymbol{\pi}}$. Zauważ, że dla $e = (i,j) \in J$ mamy $\overline{\pi}_i = 0$ i $\overline{\pi}_j = 0$. Zatem jeśli $\pi_i - \pi_j = c_{ij}$, to również $\pi'_i - \pi'_j = c_{ij}$.

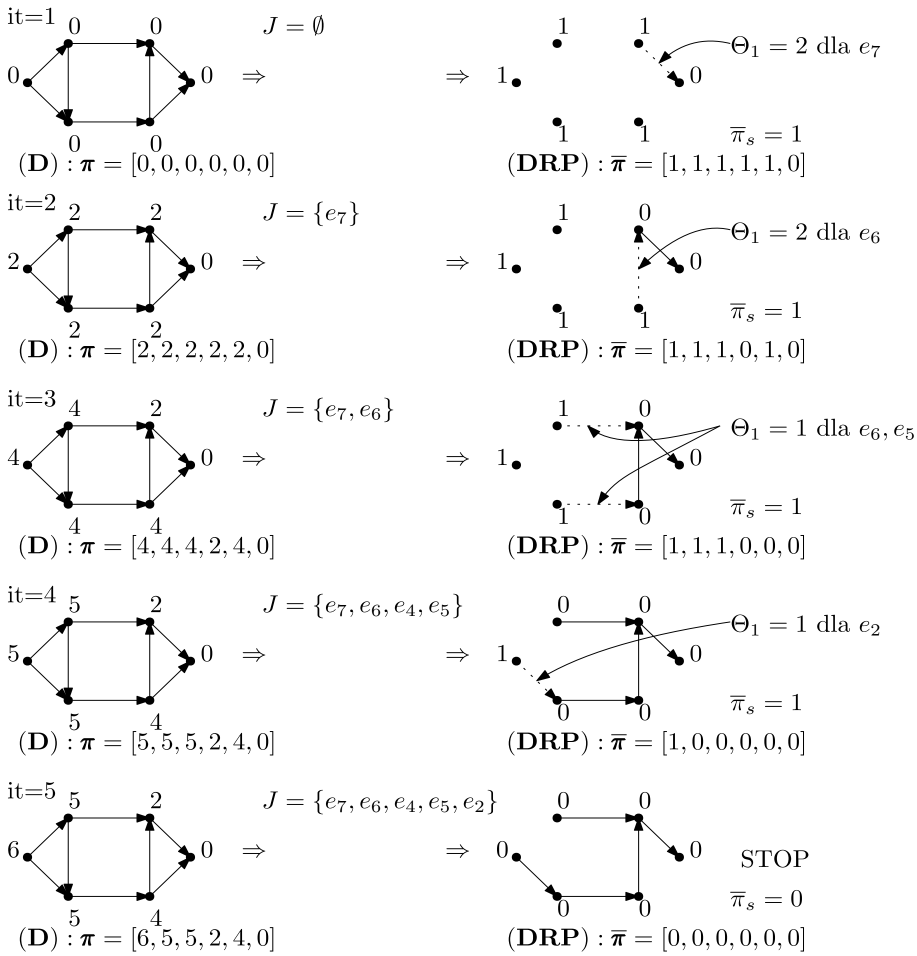
Można również zauważyć, że jeśli i został dodany do zbioru W, to wartość zmiennej dualnej π_i jest równa długości najkrótszej ścieżki od i do t. Algorytm wykonuje skończoną liczbę kroków. Jest to oczywiste, ponieważ w każdej iteracji co najmniej jeden wierzchołek zostaje dodany do W. Stąd liczba iteracji wynosi co najwyżej $|V|$. Przedstawiony jest w zasadzie algorytmem Dijkstry dla problemu najkrótszej ścieżki.

Uwagi na temat treści wykładu

Część wykładu została przygotowana na podstawie książki [1].

Literatura

[1] Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz. *Combinatorial optimization: algorithms and complexity.* Dover Publications Inc., 1998.



Rysunek 2: Ilustracja algorytmu prymalno-dualnego dla egzemplarza problemu najkrótszej ścieżki przedstawionego na rysunku 1. Rozwiązania dualne $\boldsymbol{\pi}$ i $\overline{\boldsymbol{\pi}}$, odpowiednio, zadań $(\mathbf{D})$ i $(\mathbf{DRP})$ znajdują się również nad wierzchołkami grafów.