Metody optymalizacji
Wykład nr 9

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska

Zadania prymalne i dualne

(P)

$$\min \; \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$\mathbb{X}_P = \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \leqslant n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ wektorem zmiennych decyzyjnych.

Zadania prymalne i dualne

(P)
$$\mathbb{X}_P = \begin{cases} \min\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \leqslant n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ wektorem zmiennych decyzyjnych. Odpowiadające zadanie jest dualne jest postaci:

(D)
$$\mathbb{X}_D = \begin{cases} \max\ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m \end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{X}_D = \begin{cases} \max\ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\pi} \leqslant \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

gdzie wektor $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem m zmiennych decyzyjnych dualnych nieograniczonych co do znaku.

Twierdzenie o różnicach dopełniających - oRD

Twierdzenie (o różnicach dopełniających)

Dwa rozwiązania dopuszczalne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P$ *i* $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D$*, odpowiednio, zadania prymalnego i dualnego są optymalne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:*

$$(\forall i \in [m])(\pi_i(\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - b_i) = 0), \tag{1}$$

$$(\forall j \in [n])((c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j)x_j = 0), \tag{2}$$

gdzie $\boldsymbol{a}_i^T$ *i* $\boldsymbol{A}_j$ *są, odpowiednio,* i*-tym wierszem,* j*-tą kolumną macierzy* $\boldsymbol{A}$*.*

Twierdzenie o różnicach dopełniających - oRD

Twierdzenie (o różnicach dopełniających)

Dwa rozwiązania dopuszczalne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P$ *i* $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D$*, odpowiednio, zadania prymalnego i dualnego są optymalne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:*

$$(\forall i \in [m])(\pi_i(\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - b_i) = 0), \tag{1}$$

$$(\forall j \in [n])((c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j)x_j = 0), \tag{2}$$

gdzie $\boldsymbol{a}_i^T$ *i* $\boldsymbol{A}_j$ *są, odpowiednio,* i*-tym wierszem,* j*-tą kolumną macierzy* $\boldsymbol{A}$*.*

Zauważmy, że warunki (1) są zawsze spełnione dla rozwiązania prymalnego $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P$ zadania (**P**). Wynika to z faktu, że (**P**) jest w postaci standardowej. Zatem trzeba się skupić tylko na warunkach (2).

Twierdzenie oRD - zastosowanie

- Założmy, że mamy dane rozwiązanie dualne $\pi \in \mathbb{X}_D$ zadania dualnego (**D**).

Twierdzenie oRD - zastosowanie

- Załóżmy, że mamy dane rozwiązanie dualne $\pi \in \mathbb{X}_D$ zadania dualnego (**D**).
- Jeśli uda nam się znaleźć rozwiązanie prymalne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P$ zadania (**P**) mające składowe $x_j = 0$ tam, gdzie $c_j - \pi^T \boldsymbol{A}_j > 0$, to para $(\boldsymbol{x}, \pi)$ będzie spełniać warunki (2):

$$(\forall j \in [n])((c_j - \pi^T \boldsymbol{A}_j)x_j = 0),$$

Twierdzenie oRD - zastosowanie

- Załóżmy, że mamy dane rozwiązanie dualne $\pi \in \mathbb{X}_D$ zadania dualnego (**D**).
- Jeśli uda nam się znaleźć rozwiązanie prymalne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P$ zadania (**P**) mające składowe $x_j = 0$ tam, gdzie $c_j - \pi^T \boldsymbol{A}_j > 0$, to para $(\boldsymbol{x}, \pi)$ będzie spełniać warunki (2):

$$(\forall j \in [n])((c_j - \pi^T \boldsymbol{A}_j)x_j = 0),$$

- Wtedy z twierdzenia o różnicach dopełniających dostajemy, że $\boldsymbol{x}$ i π są optymalne, odpowiednio, dla zadania prymalnego i dualnego.

Twierdzenie oRD - zastosowanie

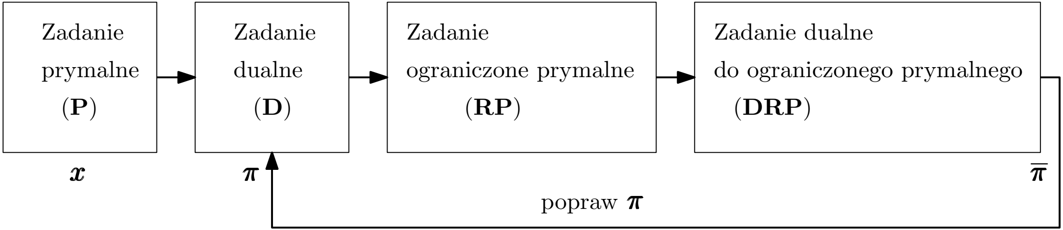
- Załóżmy, że mamy dane rozwiązanie dualne $\pi \in \mathbb{X}_D$ zadania dualnego (**D**).
- Jeśli uda nam się znaleźć rozwiązanie prymalne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P$ zadania (**P**) mające składowe $x_j = 0$ tam, gdzie $c_j - \pi^T \boldsymbol{A}_j > 0$, to para $(\boldsymbol{x}, \pi)$ będzie spełniać warunki (2):

$$(\forall j \in [n])((c_j - \pi^T \boldsymbol{A}_j)x_j = 0),$$

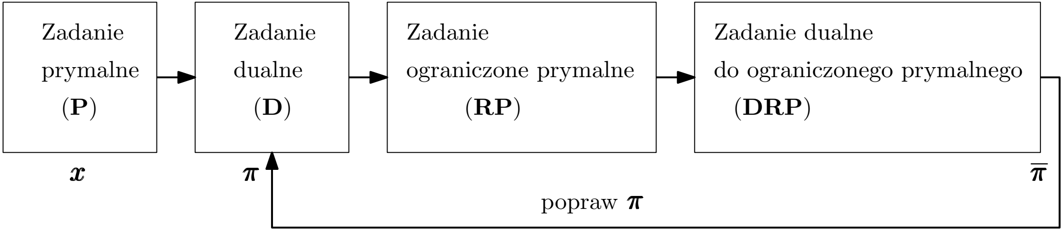
- Wtedy z twierdzenia o różnicach dopełniających dostajemy, że $\boldsymbol{x}$ i π są optymalne, odpowiednio, dla zadania prymalnego i dualnego.

Stąd idea algorytmu prymalno-dualnego polega na szukaniu rozwiązania prymalnego $\boldsymbol{x}$ dla danego rozwiązania dualnego π tak aby para $(\boldsymbol{x}, \pi)$ spełniała warunki (2).

Idea algorytmu prymalno-dualnego

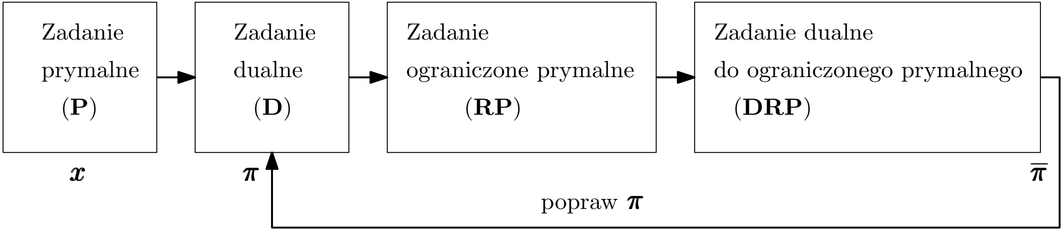


Idea algorytmu prymalno-dualnego



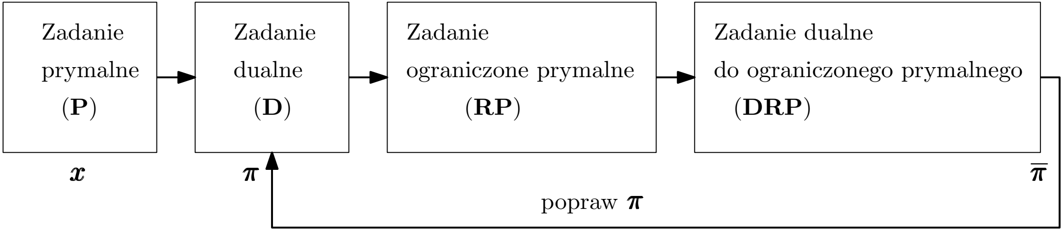
- Rozwiązujemy zadanie (**RP**) (restricted primal).

Idea algorytmu prymalno-dualnego



- Rozwiązujemy zadanie (**RP**) (restricted primal).
- Jeżeli poszukiwanie x nie powiedzie się (w przypadku sukcesu STOP), wówczas po rozwiązaniu (**RP**) otrzymujemy pewną informację w postaci zadania (**DRP**) (dual restricted primal) i jego rozwiązania optymalnego $\overline{\pi}$.

Idea algorytmu prymalno-dualnego



- Rozwiązujemy zadanie (**RP**) (restricted primal).
- Jeżeli poszukiwanie $\boldsymbol{x}$ nie powiedzie się (w przypadku sukcesu STOP), wówczas po rozwiązaniu (**RP**) otrzymujemy pewną informację w postaci zadania (**DRP**) (dual restricted primal) i jego rozwiązania optymalnego $\overline{\pi}$.
- Informacja ta posłuży nam do poprawy bieżącego rozwiązania dualnego π.

Początkowe rozwiązanie zadania (**D**)

- Załóżmy, że $\boldsymbol{c} \geqslant \mathbf{0}$, Wówczas $\pi = \mathbf{0}$ dla zadania dualnego (**D**).

Początkowe rozwiązanie zadania (**D**)

- Załóżmy, że $\boldsymbol{c} \geqslant \mathbf{0}$, Wówczas $\pi = \mathbf{0}$ dla zadania dualnego (**D**).
- Jeśli $\boldsymbol{c} \ngeqslant \mathbf{0}$, to do zadania (**P**) dodajemy ograniczenie

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = b_{m+1}$$

ze współczynnikiem $c_{n+1} = 0$ przy x_{n+1}, b_{m+1} jest dużą liczbą większą niż $\sum_{i \in [n]} x_i$ dowolnego rozwiązania zadania (**P**).

Początkowe rozwiązanie zadania (**D**)

- Załóżmy, że $\boldsymbol{c} \geqslant \mathbf{0}$, Wówczas $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$ dla zadania dualnego (**D**).
- Jeśli $\boldsymbol{c} \not\geqslant \mathbf{0}$, to do zadania (**P**) dodajemy ograniczenie

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = b_{m+1}$$

ze współczynnikiem $c_{n+1} = 0$ przy x_{n+1}, b_{m+1} jest dużą liczbą większą niż $\sum_{i \in [n]} x_i$ dowolnego rozwiązania zadania (**P**). Zadanie dualne do zmodyfikowanego zadania prymalnego (**P**) jest postaci:

$$\begin{array}{llcll} \max & \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{b} & + & b_{m+1}\pi_{m+1} & \\ & \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j & + & \pi_{m+1} \leqslant c_j & j \in [n] \\ & & & \pi_{m+1} \leqslant 0 & (\text{ponieważ } c_{n+1} = 0). \end{array}$$

Początkowe rozwiązanie zadania (**D**)

- Załóżmy, że $\boldsymbol{c} \geqslant \mathbf{0}$, Wówczas $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$ dla zadania dualnego (**D**).
- Jeśli $\boldsymbol{c} \ngeqslant \mathbf{0}$, to do zadania (**P**) dodajemy ograniczenie

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = b_{m+1}$$

ze współczynnikiem $c_{n+1} = 0$ przy x_{n+1}, b_{m+1} jest dużą liczbą większą niż $\sum_{i \in [n]} x_i$ dowolnego rozwiązania zadania (**P**).
Zadanie dualne do zmodyfikowanego zadania prymalnego (**P**) jest postaci:

$$\begin{array}{llcll} \max & \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{b} & + & b_{m+1}\pi_{m+1} & \\ & \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j & + & \pi_{m+1} \leqslant c_j & j \in [n] \\ & & & \pi_{m+1} \leqslant 0 & (\text{ponieważ } c_{n+1} = 0). \end{array}$$

Rozwiązaniem początkowym powyższego zadania dualnego jest $\pi_j = 0$ dla $j \in [n]$ i $\pi_{m+1} = \min\{c_j \ : \ j \in [n]\}$.

Algorytm prymalno-dualny

Załóżmy, że mamy rozwiązanie dopuszczalne π zadania dualnego (**D**).

Algorytm prymalno-dualny

Załóżmy, że mamy rozwiązanie dopuszczalne π zadania dualnego (**D**). Szykamy rozwiązania prymalnego $\boldsymbol{x}$ zadania (**P**) mające składowe $x_j = 0$ tam, gdzie $c_j - \pi^T \boldsymbol{A}_j > 0$, czyli dążyli do spełnienia warunków (2):

$$(\forall j \in [n])((c_j - \pi^T \boldsymbol{A}_j)x_j = 0),$$

Algorytm prymalno-dualny

Załóżmy, że mamy rozwiązanie dopuszczalne π zadania dualnego (**D**). Szykamy rozwiązania prymalnego $\boldsymbol{x}$ zadania (**P**) mające składowe $x_j = 0$ tam, gdzie $c_j - \pi^T \boldsymbol{A}_j > 0$, czyli dążyli do spełnienia warunków (2):

$$(\forall j \in [n])((c_j - \pi^T \boldsymbol{A}_j)x_j = 0),$$

Rozwiązanie π spełnia:

$$\pi^T \boldsymbol{A}_j \leqslant c_j, \ j \in [n].$$

Algorytm prymalno-dualny

Załóżmy, że mamy rozwiązanie dopuszczalne π zadania dualnego (**D**). Szykamy rozwiązania prymalnego $\boldsymbol{x}$ zadania (**P**) mające składowe $x_j = 0$ tam, gdzie $c_j - \pi^T \boldsymbol{A}_j > 0$, czyli dążyli do spełnienia warunków (2):

$$(\forall j \in [n])((c_j - \pi^T \boldsymbol{A}_j)x_j = 0),$$

Rozwiązanie π spełnia:

$$\pi^T \boldsymbol{A}_j \leqslant c_j, \ j \in [n].$$

Wyznaczmy zbiór indeksów, dla których ograniczenia $\pi^T \boldsymbol{A}_j \leqslant c_j$ zaszły w postaci równości, tj.

$$J = \{j \, : \, \pi^T \boldsymbol{A}_j = c_j, j \in [n]\}.$$

Algorytm prymalno-dualny

Szukamy teraz wspomnianego $\boldsymbol{x}$. W tym celu modyfikujemy zadanie prymalne (**P**).

Algorytm prymalno-dualny

Szukamy teraz wspomnianego $\boldsymbol{x}$. W tym celu modyfikujemy zadanie prymalne (**P**). Otrzymujemy następujący problem spełnienia ograniczeń:

$$\begin{aligned} \sum_{j\in J} a_{ij}x_j &= b_i \quad && i \in [m] \\ x_j &\geqslant 0 && j \in J \\ x_j &= 0 && j \notin J. \end{aligned} \tag{3}$$

Algorytm prymalno-dualny

Szukamy teraz wspomnianego $\boldsymbol{x}$. W tym celu modyfikujemy zadanie prymalne (**P**). Otrzymujemy następujący problem spełnienia ograniczeń:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} a_{ij} x_j &= b_i \quad & i \in [m] \\ x_j &\geqslant 0 & j \in J \\ x_j &= 0 & j \notin J. \end{aligned} \tag{3}$$

Oczywiście jeśli istnieje rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ spełniające układ ograniczeń (3), wówczas $\boldsymbol{x}$ jest optymalne dla zadania (**P**). Rozwiązanie takie może nie istnieć. Aby sprawdzić, czy układ (3) jest sprzeczny lub nie, rozwiązujemy zadanie optymalizacyjne zwane ograniczonym prymalnym (**RP**) (restricted primal).

Zadanie ograniczone prymalne (**RP**)

$$
(\mathbf{RP}) \quad
\begin{array}{rlcrl}
\xi_{opt} = \min & & & \sum_{i \in [m]} x_i^A & \\
& \sum_{j \in J} a_{ij} x_j & + & x_i^A & = b_i \quad i \in [m] \\
& x_j & & & \geqslant 0 \quad j \in J \\
& x_j & & & = 0 \quad j \notin J \\
& & & x_i^A & \geqslant 0 \quad i \in [m],
\end{array}
$$

gdzie x_i^A, $i \in [m]$, są zmiennymi sztucznymi.

Zadanie ograniczone prymalne (**RP**)

$$
(\mathbf{RP}) \quad
\begin{array}{rrcrcll}
\color{red}{\xi_{opt}} = \min & & & \sum_{i\in[m]} x_i^A & & & \\
& \sum_{j\in J} a_{ij}x_j & + & x_i^A & = b_i & & i \in [m] \\
& x_j & & & \geqslant 0 & & j \in J \\
& x_j & & & = 0 & & j \notin J \\
& & & x_i^A & \geqslant 0 & & i \in [m],
\end{array}
$$

gdzie x_i^A, $i \in [m]$, są zmiennymi sztucznymi.

- Jeśli $\color{red}{\xi_{opt}} = 0$, wówczas układ (3) ma rozwiązanie dopuszczalne i $\boldsymbol{x}$ jest optymalne dla (**P**) - STOP!

Zadanie ograniczone prymalne (**RP**)

$$
(\mathbf{RP}) \quad
\begin{array}{rlcll}
\xi_{opt} = \min & & & \sum_{i\in[m]} x_i^A & \\
& \sum_{j\in J} a_{ij}x_j & + & x_i^A = b_i & i \in [m] \\
& x_j & & \geqslant 0 & j \in J \\
& x_j & & = 0 & j \notin J \\
& & & x_i^A \geqslant 0 & i \in [m],
\end{array}
$$

gdzie x_i^A, $i \in [m]$, są zmiennymi sztucznymi.

- Jeśli $\xi_{opt} = 0$, wówczas układ (3) ma rozwiązanie dopuszczalne i $\boldsymbol{x}$ jest optymalne dla (**P**) - STOP!
- Jeśli $\xi_{opt} > 0$ układ (3) jest sprzeczny. W tym przypadku będziemy musieli skonstruować nowe rozwiązanie dualne π^*.

Zadanie dualne do ograniczonego prymalnego (**DRP**)

Rozpatrujemy problem dualny do (**RP**), dualny do ograniczonego prymalnego (dual restricted primal) (**DRP**),

$$
(\mathbf{DRP}) \qquad
\begin{array}{rll}
\max & \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{b} & \\
& \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0 & j \in J \\
& \pi_i \leqslant 1 & i \in [m] \\
& \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m &
\end{array}
$$

Zadanie dualne do ograniczonego prymalnego (**DRP**)

Rozpatrujemy problem dualny do (**RP**), dualny do ograniczonego prymalnego (dual restricted primal) (**DRP**),

$$
(\mathbf{DRP}) \quad
\begin{array}{rlr}
\max & \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{b} & \\
 & \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0 & j \in J \\
 & \pi_i \leqslant 1 & i \in [m] \\
 & \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m &
\end{array}
$$

Rozwiązanie optymalne $\overline{\pi}$ zadania (**DRP**) można otrzymać bez jego rozwiązywania korzystając z informacji po rozwiązaniu zadania (**RP**).

Nowe rozwiązanie zadana dualnego (**D**)

Poprawiamy stare rozwiązanie dualne π zadania (**D**).

Nowe rozwiązanie zadana dualnego (**D**)

Poprawiamy stare rozwiązanie dualne π zadania (**D**).
Nowe, zmodyfikowane, rozwiązanie dualne π^* będzie postaci

$$\pi^* := \pi + \Theta\,\overline{\pi}.$$

Nowe rozwiązanie zadana dualnego (**D**)

Poprawiamy stare rozwiązanie dualne π zadania (**D**).
Nowe, zmodyfikowane, rozwiązanie dualne π^* będzie postaci

$$\pi^* := \pi + \Theta \overline{\pi}.$$

Dobierzemy $\Theta \in \mathbb{R}$, tak aby nowe rozwiązanie dualne π^* było dopuszczalne i wartość funkcji celu zadania (**D**) była większa od poprzedniej dla π.

Dobór Θ

Nowej wartość funkcji celu dla zadania (**D**) jest postaci

$$(\pi^*)^T \boldsymbol{b} = \pi^T \boldsymbol{b} + \Theta\, \overline{\pi}^T \boldsymbol{b} = \pi^T \boldsymbol{b} + \Theta\, \xi_{opt}.$$

Dobór Θ

Nowej wartość funkcji celu dla zadania (**D**) jest postaci

$$(\pi^*)^T \boldsymbol{b} = \pi^T \boldsymbol{b} + \Theta\, \overline{\pi}^T \boldsymbol{b} = \pi^T \boldsymbol{b} + \Theta\, \xi_{opt}.$$

Równość $\xi_{opt} = \overline{\pi}^T \boldsymbol{b} > 0$ wynika z silnego twierdzenia o dualności, dla (**RP**) i (**DRP**).

Dobór Θ

Nowej wartość funkcji celu dla zadania (**D**) jest postaci

$$(\pi^*)^T \mathbf{b} = \pi^T \mathbf{b} + \Theta \overline{\pi}^T \mathbf{b} = \pi^T \mathbf{b} + \Theta \xi_{opt}.$$

Równość $\xi_{opt} = \overline{\pi}^T \mathbf{b} > 0$ wynika z silnego twierdzenia o dualności, dla (**RP**) i (**DRP**).
Aby $(\pi^*)^T \mathbf{b} > \pi^T \mathbf{b}$, Θ musi być dodatnia, $\Theta > 0$.
Ponadto π^* musi być dopuszczalne dla (**D**), czyli musi spełniać następujące nierówności:

$$(\pi^*)^T \mathbf{A}_j = \pi^T \mathbf{A}_j + \Theta \overline{\pi}^T \mathbf{A}_j \leqslant c_j, \; j \in [n].$$

Dobór Θ

Nowej wartość funkcji celu dla zadania (**D**) jest postaci

$$(\pi^*)^T \boldsymbol{b} = \pi^T \boldsymbol{b} + \Theta\, \overline{\pi}^T \boldsymbol{b} = \pi^T \boldsymbol{b} + \Theta\, \xi_{opt}.$$

Równość $\xi_{opt} = \overline{\pi}^T \boldsymbol{b} > 0$ wynika z silnego twierdzenia o dualności, dla (**RP**) i (**DRP**).
Aby $(\pi^*)^T \boldsymbol{b} > \pi^T \boldsymbol{b}$, Θ musi być dodatnia, $\Theta > 0$.
Ponadto π^* musi być dopuszczalne dla (**D**), czyli musi spełniać następujące nierówności:

$$(\pi^*)^T \boldsymbol{A}_j = \pi^T \boldsymbol{A}_j + \Theta\, \overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant c_j,\ j \in [n].$$

Kiedy $\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ dla wszystkich $j \in [n]$, to π^* jest zawsze dopuszczalne.

Dobór Θ

Nowej wartość funkcji celu dla zadania (**D**) jest postaci

$$(\pi^*)^T\boldsymbol{b} = \pi^T\boldsymbol{b} + \Theta\,\overline{\pi}^T\boldsymbol{b} = \pi^T\boldsymbol{b} + \Theta\,\xi_{opt}.$$

Równość $\xi_{opt} = \overline{\pi}^T\boldsymbol{b} > 0$ wynika z silnego twierdzenia o dualności, dla (**RP**) i (**DRP**).
Aby $(\pi^*)^T\boldsymbol{b} > \pi^T\boldsymbol{b}$, Θ musi być dodatnia, $\Theta > 0$.
Ponadto π^* musi być dopuszczalne dla (**D**), czyli musi spełniać następujące nierówności:

$$(\pi^*)^T\boldsymbol{A}_j = \pi^T\boldsymbol{A}_j + \Theta\,\overline{\pi}^T\boldsymbol{A}_j \leqslant c_j,\ j \in [n].$$

Kiedy $\overline{\pi}^T\boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ dla wszystkich $j \in [n]$, to π^* jest zawsze dopuszczalne.
Jednak jeżeli $\overline{\pi}^T\boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ dla wszystkich $j \in [n]$, to wartość Θ możemy zwiększać do $+\infty$.

Dobór Θ

Nowej wartość funkcji celu dla zadania (**D**) jest postaci

$$(\pi^*)^T \boldsymbol{b} = \pi^T \boldsymbol{b} + \Theta \overline{\pi}^T \boldsymbol{b} = \pi^T \boldsymbol{b} + \Theta \xi_{opt}.$$

Równość $\xi_{opt} = \overline{\pi}^T \boldsymbol{b} > 0$ wynika z silnego twierdzenia o dualności, dla (**RP**) i (**DRP**).
Aby $(\pi^*)^T \boldsymbol{b} > \pi^T \boldsymbol{b}$, Θ musi być dodatnia, $\Theta > 0$.
Ponadto π^* musi być dopuszczalne dla (**D**), czyli musi spełniać następujące nierówności:

$$(\pi^*)^T \boldsymbol{A}_j = \pi^T \boldsymbol{A}_j + \Theta \overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant c_j, \; j \in [n].$$

Kiedy $\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ dla wszystkich $j \in [n]$, to π^* jest zawsze dopuszczalne.
Jednak jeżeli $\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ dla wszystkich $j \in [n]$, to wartość Θ możemy zwiększać do $+\infty$. Zatem wartość funkcji celu zadania (**D**) jest nieograniczona. Stąd zadanie prymalne (**P**) jest sprzeczne.

Dobór Θ...

Twierdzenie

Jeżeli w zadaniu (**RP**) $\xi_{opt} > 0$ *i* $\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ *dla wszystkich* $j \notin J$, *wtedy zadanie prymalne* (**P**) *jest sprzeczne.*

Dobór Θ...

Twierdzenie

Jeżeli w zadaniu (**RP**) $\xi_{opt} > 0$ *i* $\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ *dla wszystkich* $j \notin J$*, wtedy zadanie prymalne* (**P**) *jest sprzeczne.*

W powyższym twierdzeniu sprawdzamy tylko nierówności $\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ dla $j \notin J$, ponieważ dla $j \in J$ nierówności $\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ są zawsze spełnione, co wynika z faktu, że $\overline{\pi}$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (**DRP**).

Dobór Θ...

Twierdzenie

Jeżeli w zadaniu (**RP**) $\xi_{opt} > 0$ *i* $\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ *dla wszystkich* $j \notin J$*, wtedy zadanie prymalne* (**P**) *jest sprzeczne.*

W powyższym twierdzeniu sprawdzamy tylko nierówności $\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ dla $j \notin J$, ponieważ dla $j \in J$ nierówności $\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ są zawsze spełnione, co wynika z faktu, że $\overline{\pi}$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (**DRP**). Zatem musimy się skupić na zapewnieniu dopuszczalności π^*, kiedy

$$\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j > 0 \text{ dla pewnych } j \notin J.$$

Dobór Θ...

Twierdzenie

Jeżeli w zadaniu (**RP**) $\xi_{opt} > 0$ *i* $\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ *dla wszystkich* $j \notin J$, *wtedy zadanie prymalne* (**P**) *jest sprzeczne.*

W powyższym twierdzeniu sprawdzamy tylko nierówności $\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ dla $j \notin J$, ponieważ dla $j \in J$ nierówności $\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ są zawsze spełnione, co wynika z faktu, że $\overline{\pi}$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (**DRP**). Zatem musimy się skupić na zapewnieniu dopuszczalności π^*, kiedy

$$\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j > 0 \text{ dla pewnych } j \notin J.$$

W tym przypadku kryterium dopuszczalności ma postać:

$$(\pi^*)^T \boldsymbol{A}_j = \pi^T \boldsymbol{A}_j + \Theta \overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant c_j, j \notin J \text{ i } \overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j > 0.$$

Dobór Θ...

Twierdzenie

Jeżeli w zadaniu (**RP**) $\xi_{opt} > 0$ *i istnieje* $j \notin J$ *takie, że* $\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j > 0$. *Wówczas największą wartość* Θ *zachowującą dopuszczalność* $\pi^* := \pi + \Theta \overline{\pi}$ *wyznaczamy następująco:*

$$\Theta_1 = \min \left\{ \frac{c_j - \pi^T \boldsymbol{A}_j}{\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j} : \overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j > 0, j \notin J \right\}.$$

Nowa wartość funkcji celu:

$$(\pi^*)^T \boldsymbol{b} = \pi^T \boldsymbol{b} + \Theta_1 \overline{\pi}^T \boldsymbol{b} > \pi^T \boldsymbol{b}.$$

Szkic algorytmu prymalno-dualnego

Krok 1 Znajdź początkowe rozwiązanie dopuszczalne π zadania dualnego (**D**).

Szkic algorytmu prymalno-dualnego

Krok 1 Znajdź początkowe rozwiązanie dopuszczalne π zadania dualnego (**D**).

Krok 2 Wyznacz zbiór indeksów

$$J = \{j : \pi^T \boldsymbol{A}_j = c_j, j \in [n]\}.$$

Szkic algorytmu prymalno-dualnego

Krok 1 Znajdź początkowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{\pi}$ zadania dualnego (**D**).

Krok 2 Wyznacz zbiór indeksów

$$J = \{j : \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j = c_j, j \in [n]\}.$$

Krok 3 Rozwiąż zadanie (**RP**).
Jeśli $\xi_{opt} = 0$, wówczas rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ zadania (**RP**) jest optymalnym rozwiązaniem zadania prymalnego (**P**), STOP.

Szkic algorytmu prymalno-dualnego

Krok 1 Znajdź początkowe rozwiązanie dopuszczalne π zadania dualnego (**D**).

Krok 2 Wyznacz zbiór indeksów

$$J = \{j : \pi^T A_j = c_j, j \in [n]\}.$$

Krok 3 Rozwiąż zadanie (**RP**).
Jeśli $\xi_{opt} = 0$, wówczas rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ zadania (**RP**) jest optymalnym rozwiązaniem zadania prymalnego (**P**), STOP.

Krok 4 Jeżeli $\overline{\pi}^T A_j \leqslant 0$ dla wszystkich $j \notin J$, to zadanie prymalne (**P**) jest sprzeczne, STOP.

Szkic algorytmu prymalno-dualnego

Krok 1 Znajdź początkowe rozwiązanie dopuszczalne π zadania dualnego (**D**).

Krok 2 Wyznacz zbiór indeksów

$$J = \{j : \pi^T \boldsymbol{A}_j = c_j, j \in [n]\}.$$

Krok 3 Rozwiąż zadanie (**RP**).
Jeśli $\xi_{opt} = 0$, wówczas rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ zadania (**RP**) jest optymalnym rozwiązaniem zadania prymalnego (**P**), STOP.

Krok 4 Jeżeli $\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ dla wszystkich $j \notin J$, to zadanie prymalne (**P**) jest sprzeczne, STOP.

Krok 5 Wyznacza Θ_1

$$\Theta_1 = \min \left\{ \frac{c_j - \pi^T \boldsymbol{A}_j}{\overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j} : \overline{\pi}^T \boldsymbol{A}_j > 0, j \notin J \right\}.$$

i nowe rozwiązanie dopuszczalne zadania dualnego (**D**)

$$\pi := \pi + \Theta_1 \overline{\pi}.$$

Idź do Kroku 2.

Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książki

Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz.
Combinatorial optimization: algorithms and complexity.
Dover Publications Inc., 1998.