1 Algorytm prymalno-dualny

Rozważmy zadanie prymalne w postaci standardowej

$$(\mathbf{P}) \qquad \begin{array}{l} \min\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \mathbb{X}_P = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{array} \right. \end{array} \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \leqslant n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ wektorem zmiennych decyzyjnych. Odpowiadające zadanie jest dualne jest postaci:

$$(\mathbf{D}) \qquad \begin{array}{l} \max\ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi} \\ \mathbb{X}_D = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m \end{array} \right. \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \max\ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi} \\ \mathbb{X}_D = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\pi} \leqslant \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m, \end{array} \right. \end{array} \tag{2}$$

gdzie wektor $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem m zmiennych decyzyjnych dualnych nieograniczonych co do znaku.

Przypomnijmy twierdzenie o różnicach dopełniających, które jest podstawą algorytmu prymalno-dualnego:

Twierdzenie 1 (o różnicach dopełniających)**.** *Dwa rozwiązania dopuszczalne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P$ i $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D$, odpowiednio, zadania prymalnego i dualnego są optymalne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:*

$$(\forall i \in [m])(\pi_i(\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} - b_i) = 0), \tag{3}$$

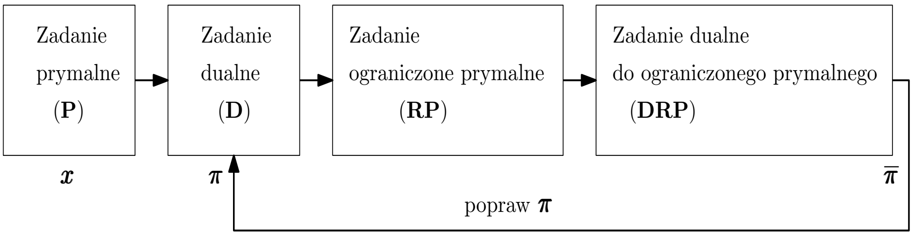
$$(\forall j \in [n])((c_j - \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}_j)x_j = 0), \tag{4}$$

gdzie $\boldsymbol{a}_i^T$ i $\boldsymbol{A}_j$ są, odpowiednio, i-tym wierszem, j-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$.

Zauważmy, że warunki (3) są zawsze spełnione dla rozwiązania prymalnego $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P$ zadania (1). Wynika to z faktu, że zadanie (1) jest w postaci standardowej. Zatem trzeba się skupić tylko na warunkach (4) .

Załóżmy teraz, że mamy dane rozwiązanie dualne $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{X}_D$ zadania dualnego (2). Jeśli uda nam się znaleźć rozwiązanie prymalne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}_P$ zadania (1) mające składowe $x_j = 0$ tam, gdzie $c_j - \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}_j > 0$, to para $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\pi})$ będzie spełniać warunki (4). Wtedy z twierdzenia 1 dostajemy, że $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\pi}$ są optymalne, odpowiednio, dla zadania prymalnego i dualnego.

Stąd idea algorytmu prymalno-dualnego polega na szukaniu rozwiązania prymalnego $\boldsymbol{x}$ dla danego rozwiązania dualnego $\boldsymbol{\pi}$ tak aby para $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\pi})$ spełniała warunki (4). W tym celu rozwiązujemy zadanie *ograniczone prymalne* (**RP**) (restricted primal). Jeżeli poszukiwanie $\boldsymbol{x}$ nie powiedzie się (w przypadku sukcesu algorytm kończy działanie), wówczas po rozwiązaniu (**RP**) otrzymujemy pewną informację w postaci zadania *dualnego do ograniczonego prymalnego* (**DRP**) (dual restricted primal) i jego rozwiązania optymalnego $\overline{\boldsymbol{\pi}}$. Informacja ta posłuży nam do poprawy bieżącego rozwiązania dualnego $\boldsymbol{\pi}$. Po skończonej liczbie kroków algorytm kończy działanie. Ilustracja idei algorytmu przedstawiona jest na rysunku 1.



Rysunek 1: Idea algorytmu prymalno-dualnego.

Przedstawimy szczegółowo kolejne etapy algorytmu prymalno-dualnego. Możemy założyć, że współczynniki funkcji celu $\boldsymbol{c}$ zadania prymalnego (**P**) są nieujemne. Wówczas $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$ jest początkowym rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego (**D**) - ograniczenia $\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}^T$ są spełnione. Jeżeli $\boldsymbol{c} \not\geqslant \mathbf{0}$, wówczas początkowe rozwiązanie dopuszczalne zadania dualnego (**D**) wyznaczamy w następujący sposób. Do zadania prymalnego (**P**) dodajemy ograniczenie

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = b_{m+1}$$

ze współczynnikiem funkcji celu $c_{n+1} = 0$ przy x_{n+1}. Prawa strona b_{m+1} jest dużą liczbą większą niż suma wartości składowych $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ dowolnego rozwiązania dopuszczalnego zadania prymalnego (**P**). Oczywiście dodanie dodatkowego ograniczenia nie wpływa na rozwiązanie optymalne zadania (**P**). Zadanie dualne do zmodyfikowanego zadania prymalnego (**P**) jest postaci:

$$\begin{array}{llcrll}
\max & \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{b} & + & b_{m+1}\pi_{m+1} & & \\
& \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}_j & + & \pi_{m+1} & \leqslant c_j & j \in [n] \\
& & & \pi_{m+1} & \leqslant 0 & (\text{ponieważ } c_{n+1} = 0).
\end{array}$$

Łatwo sprawdzić, że teraz rozwiązaniem początkowym powyższego zadania dualnego jest $\pi_j = 0$ dla $j \in [n]$ i $\pi_{m+1} = \min\{c_j \,:\, j \in [n]\}$.

Załóżmy teraz, że mamy rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{\pi}$ zadania dualnego (**D**). Będziemy teraz starali się znaleźć rozwiązanie prymalne $\boldsymbol{x}$ zadania (**P**) mające składowe $x_j = 0$ tam, gdzie $c_j - \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}_j > 0$, czyli dążyli do spełnienia warunków (4). Rozwiązanie $\boldsymbol{\pi}$ spełnia:

$$\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}_j \leqslant c_j,\ j \in [n].$$

Wyznaczmy zbiór indeksów, dla których powyższe ograniczenia zaszły w postaci równości, tj.

$$J = \{j \,:\, \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}_j = c_j, j \in [n]\}.$$

Szukamy teraz wspomnianego $\boldsymbol{x}$. W tym celu modyfikujemy zadanie prymalne (**P**). Otrzymujemy następujący problem spełnienia ograniczeń:

$$\begin{array}{lll} \sum_{j\in J} a_{ij}x_j & = b_i & i \in [m] \\ x_j & \geqslant 0 & j \in J \\ x_j & = 0 & j \notin J. \end{array} \tag{5}$$

Oczywiście jeśli istnieje rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ spełniające układ ograniczeń (5), wówczas $\boldsymbol{x}$ jest optymalne dla zadania (**P**). Rozwiązanie takie może nie istnieć. Aby sprawdzić, czy układ (5) jest sprzeczny lub nie, rozwiązujemy następujące zadanie optymalizacyjne zwane *ograniczonym prymalnym* (**RP**) (restricted primal), podobnie jak w pierwszej fazie metody dwóch faz.

$$(\mathbf{RP}) \quad \begin{array}{llllll} \min & & & \sum_{i\in[m]} x_i^A & & \\ & \sum_{j\in J} a_{ij}x_j & + & x_i^A & = b_i & i \in [m] \\ & x_j & & & \geqslant 0 & j \in J \\ & x_j & & & = 0 & j \notin J \\ & & & x_i^A & \geqslant 0 & i \in [m], \end{array} \tag{6}$$

gdzie x_i^A, $i \in [m]$, są zmiennymi sztucznymi. Jeżeli po rozwiązaniu zadania (np. za pomocą algorytmu sympleks) optymalna wartość funkcji celu, oznaczmy ją przez ξ_{opt}, jest równa zero, $\xi_{opt} = 0$, wówczas układ ograniczeń (5) ma rozwiązanie dopuszczalne i $\boldsymbol{x}$ jest optymalne dla (**P**). W przeciwnym przypadku, $\xi_{opt} > 0$, układ ograniczeń (5) jest sprzeczny. W tym przypadku będziemy musieli skonstruować nowe rozwiązanie dualne $\boldsymbol{\pi}^*$. Rozpatrujemy problem dualny do (**RP**), *dualny do ograniczonego prymalnego* (dual restricted primal) (**DRP**),

$$(\mathbf{DRP}) \quad \begin{array}{llll} \max & \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{b} & & \\ & \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{A}_j & \leqslant 0 & j \in J \\ & \pi_i & \leqslant 1 & i \in [m] \\ & \boldsymbol{\pi} & \in \mathbb{R}^m & \end{array} \tag{7}$$

Rozwiązanie optymalne $\overline{\boldsymbol{\pi}}$ zadania (**DRP**) można otrzymać bez jego rozwiązywania korzystając z informacji po rozwiązaniu zadania (**RP**) (zob. wykłady nr 6 i 8).

Możemy teraz spróbować poprawić stare rozwiązanie dualne $\boldsymbol{\pi}$ zadania (**D**). Mianowicie nowe rozwiązanie dualne $\boldsymbol{\pi}^*$ będzie postaci

$$\boldsymbol{\pi}^* := \boldsymbol{\pi} + \Theta\,\overline{\boldsymbol{\pi}}.$$

Dobierzemy $\Theta \in \mathbb{R}$, tak aby nowe rozwiązanie dualne $\boldsymbol{\pi}^*$ było dopuszczalne i wartość funkcji celu zadania (**D**) była większa od poprzedniej dla $\boldsymbol{\pi}$. Przyjrzyjmy się nowej wartości funkcji celu

$$(\boldsymbol{\pi}^*)^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{b} + \Theta\,\overline{\boldsymbol{\pi}}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{b} + \Theta\,\xi_{opt}.$$

Równość $\xi_{opt} = \overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{b} > 0$ wynika z silnego twierdzenia o dualności, które dotyczy tutaj zadań (**RP**) i (**DRP**). Zatem aby zwiększyć funkcję celu zadania (**D**), $(\boldsymbol{\pi}^*)^T \boldsymbol{b} > \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{b}$, Θ musi być dodatnia, $\Theta > 0$. Musimy teraz dobrać Θ, aby $\boldsymbol{\pi}^*$ było dopuszczalnym rozwiązaniem zadania (**D**), czyli spełniać następujące nierówności:

$$(\boldsymbol{\pi}^*)^T \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j + \Theta\, \overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant c_j,\ j \in [n].$$

Zauważmy, że kiedy $\overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ dla wszystkich $j \in [n]$, to $\boldsymbol{\pi}^*$ jest zawsze dopuszczalne. Jednak jeżeli $\overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ dla wszystkich $j \in [n]$, to wartość Θ możemy zwiększać do $+\infty$. Zatem wartość funkcji celu zadania (**D**) jest nieograniczona. Stąd zadanie prymalne (**P**) jest sprzeczne. Dostajemy, więc, następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Jeżeli w zadaniu* (**RP**) $\xi_{opt} > 0$ *i* $\overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ *dla wszystkich* $j \notin J$*, wtedy zadanie prymalne* (**P**) *jest sprzeczne.*

Zauważmy, że w powyższym twierdzeniu sprawdzamy tylko nierówności $\overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ dla $j \notin J$, ponieważ dla $j \in J$ nierówności $\overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ są zawsze spełnione, co wynika z faktu, że $\overline{\boldsymbol{\pi}}$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (**DRP**).

Zatem musimy się skupić na zapewnieniu dopuszczalności $\boldsymbol{\pi}^*$, kiedy

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j > 0 \text{ dla pewnych } j \notin J.$$

W tym przypadku kryterium dopuszczalności ma postać:

$$(\boldsymbol{\pi}^*)^T \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j + \Theta\, \overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant c_j, j \notin J \text{ i } \overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j > 0.$$

Prowadzi nas to do twierdzenia.

Twierdzenie 3. *Jeżeli w zadaniu* (**RP**) $\xi_{opt} > 0$ *i istnieje* $j \notin J$ *takie, że* $\overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j > 0$*. Wówczas największą wartość* Θ *zachowującą dopuszczalność* $\boldsymbol{\pi}^* := \boldsymbol{\pi} + \Theta\, \overline{\boldsymbol{\pi}}$ *wyznaczamy następująco:*

$$\Theta_1 = \min \left\{ \frac{c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j}{\overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j} \ : \ \overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j > 0, j \notin J \right\}.$$

Nowa wartość funkcji celu:

$$(\boldsymbol{\pi}^*)^T \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{b} + \Theta_1\, \overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{b} > \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{b}.$$

Możemy teraz podać szkic algorytmu prymalno-dualnego.

Szkic algorytmu prymalno-dualnego

Krok 1 Znajdź początkowe rozwiązanie dopuszczalne $\boldsymbol{\pi}$ zadania dualnego (**D**).

Krok 2 Wyznacz zbiór indeksów

$$J = \{j : \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j = c_j, j \in [n]\}.$$

Krok 3 Rozwiąż zadanie (**RP**).

Jeśli $\xi_{opt} = 0$, wówczas rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ zadania (**RP**) jest optymalnym rozwiązaniem zadania prymalnego (**P**), STOP.

Krok 4 Jeżeli $\overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j \leqslant 0$ dla wszystkich $j \notin J$, to zadanie prymalne (**P**) jest sprzeczne, STOP.

Krok 5 Wyznacza Θ_1

$$\Theta_1 = \min \left\{ \frac{c_j - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{A}_j}{\overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j} : \overline{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{A}_j > 0, j \notin J \right\}.$$

i nowe rozwiązanie dopuszczalne zadania dualnego (**D**)

$$\boldsymbol{\pi} := \boldsymbol{\pi} + \Theta_1 \overline{\boldsymbol{\pi}}.$$

Idź do Kroku 2.

Uwagi na temat treści wykładu

Część wykładu została przygotowana na podstawie książki [1].

Literatura

[1] Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz. *Combinatorial optimization: algorithms and complexity.* Dover Publications Inc., 1998.