1 Problem programowania liniowego

Egzemplarz problemu programowani liniowego w najbardziej ogólnej postaci można zdefiniować następująco:

Postać ogólna

$$\min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \sum_{j\in[n]} c_j x_j \tag{1}$$

$$\text{przy warunkach} \sum_{j\in[n]} a_{ij} x_j = b_i \qquad i \in M_= \tag{2}$$

$$\sum_{j\in[n]} a_{ij} x_j \leqslant b_i \qquad i \in M_\leqslant \tag{3}$$

$$\sum_{j\in[n]} a_{ij} x_j \geqslant b_i \qquad i \in M_\geqslant \tag{4}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j \in N_\geqslant \tag{5}$$

$$x_j \leqslant 0 \qquad j \in N_\leqslant \tag{6}$$

$$x_j \in \mathbb{R} \qquad j \in N_\mathbb{R} \tag{7}$$

gdzie danymi są: $m = |M_=| + |M_\leqslant| + |M_\geqslant|$, $n = |N_\geqslant| + |N_\leqslant| + |N_\mathbb{R}|$, macierz ograniczeń $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, wektor prawych stron $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ i wektor współczynników funkcji celu $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$. Wektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem zmiennych decyzyjnych.

Postać kanoniczna

$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{przy warunkach } &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Postać standardowa

$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{przy warunkach } &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Równoważność postaci

Okazuje się, że powyższe postacie są sobie równoważne w takim sensie, że za pomocą prostych transformacji możemy przekształcić egzemplarz jednej postaci do egzemplarza drugiej postaci i te dwa egzemplarze mają te same rozwiązanie. Mianowicie

Przejście z postaci ogólnej do kanonicznej:

1. ograniczenia (3) mnożymy obustronnie przez -1,
2. zmienne decyzyjne $x_j \leqslant 0$ zastępujemy następująco $x_j = -x_j^-$, gdzie $x_j^- \geqslant 0$, i ograniczenia (6) mnożymy obustronnie przez -1,
3. zmienne decyzyjne $x_j \in \mathbb{R}$ zastępujemy różnicą dwóch nieujemnych zmiennych decyzyjnych, tzn. $x_j = x_j^+ - x_j^-$, gdzie $x_j^+ \geqslant 0$ i $x_j^- \geqslant 0$.

Przejście z postaci ogólnej do standardowej:

1. zmienne decyzyjne $x_j \leqslant 0$ zastępujemy następująco $x_j = -x_j^-$, gdzie $x_j^- \geqslant 0$, i ograniczenia (6) mnożymy obustronnie przez -1,
2. zmienne decyzyjne $x_j \in \mathbb{R}$ zastępujemy różnicą dwóch nieujemnych zmiennych decyzyjnych, tzn. $x_j = x_j^+ - x_j^-$, gdzie $x_j^+ \geqslant 0$ i $x_j^- \geqslant 0$,
3. ograniczenie (3) sprowadzamy do ograniczenia równościowego przez wprowadzenie nieujemnej zmiennej dodatkowej (niedoboru), tj.
$$\sum_{j\in[n]} a_{ij}x_j + s_i = b_i, \quad s_i \geqslant 0,$$
4. ograniczenie (4) sprowadzamy do ograniczenia równościowego przez wprowadzenie nieujemnej zmiennej dodatkowej (nadmiaru), tj.
$$\sum_{j\in[n]} a_{ij}x_j - s_i = b_i, \quad s_i \geqslant 0.$$

Ponadto, jeśli maksymalizujemy funkcję celu, w którejś postaci, wówczas wystarczy pomnożyć przez -1 jej współczynniki i minimalizować zmodyfikowaną funkcję celu, tzn. $\max \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ jest równoważne $\min -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$.

2 Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks

O tego momentu będziemy rozpatrywali zagadnienie programowania liniowego w postaci standardowe (z min):

$$\begin{array}{l} \quad\ \min\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \mathbb{X} = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{array} \right. \end{array}$$

gdzie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m < n)$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ $(\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0})$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.

Założenie 1. $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$.

Ograniczenia $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ możemy zapisać:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

gdzie $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ i $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = m$ (z założenia 1), $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} \in \mathbb{R}^m$ i $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Definicja 1. *Rozwiązanie $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}}]^T$, takie, że $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0}$, nazywamy rozwiązaniem bazowym układu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ a podmacierz $\boldsymbol{B}$ bazą.*

Jeśli dodatkowo $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$, to mówimy, że $\boldsymbol{x}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym.

Założenie 2. $\mathbb{X} \neq \emptyset$.

Definicja 2. *Niech $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym. Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{U}$ nazywamy wierzchołkiem zbioru wypukłego $\mathbb{U}$, jeśli nie istnieją dwa punkty $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{U}$ różne od $\boldsymbol{x}$ i $\lambda \in (0, 1)$, że $\boldsymbol{x}$ jest ich ścisłą wypukłą kombinacją, tj.*

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{u} + (1 - \lambda)\boldsymbol{v}.$$

Twierdzenie 1. *Rozwiązanie $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ jest wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$ wtedy i tylko wtedy $\boldsymbol{x}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ będzie wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$. Jeśli $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, wówczas z założenia 1 natychmiast dostajemy, że $\boldsymbol{x}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Załóżmy, że w $\boldsymbol{x}$ istnieje co najmniej jedna składowa dodatnia oraz $\boldsymbol{x}$ nie jest rozwiązaniem bazowym (dowód nie wprost). Zatem jego składowe można podzielić na $[\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}}]^T$, gdzie $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} > \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0}$.

Ograniczenia $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ możemy zapisać:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{G} & \boldsymbol{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} \\ \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \tag{8}$$

Ponieważ $\boldsymbol{x}$ nie jest rozwiązaniem bazowym, macierz $\boldsymbol{G}$ ma liniowo zależne kolumny. Stąd istnieje wektor $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ taki, że $\boldsymbol{Gw} = \boldsymbol{0}$. Ograniczenia (8) możemy zapisać:

$$\boldsymbol{Gx}^{\boldsymbol{G}} + \boldsymbol{Gw} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} \pm \alpha \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{b} \text{ dla } \alpha \neq 0.$$

Z faktu, że $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} > \boldsymbol{0}$ wynika, że możemy tak dobrać $\alpha \neq 0$, aby $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} \pm \alpha \boldsymbol{w} > \boldsymbol{0}$. Stąd otrzymujemy dwa wektory:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \text{ i } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{G}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

takie, że $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$. Ponadto łatwo zauważyć, że

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}.$$

Stąd $\lambda = 1/2$. Co przeczy, że $\boldsymbol{x}$ jest wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\boldsymbol{x}$ nie jest wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$ (dowód nie wprost). Stąd istnieją $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}$ różne od $\boldsymbol{x}$ i $\lambda \in (0, 1)$ takie, że

$$\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{u} + (1 - \lambda)\boldsymbol{v}.$$

Rozwiązanie $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}}]^T$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, tj. $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}$. Zapiszmy

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{P}} \end{bmatrix} \text{ i } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}} \end{bmatrix}$$

Ponieważ $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{u} + (1 - \lambda)\boldsymbol{v}$. Zatem $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \lambda\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{P}} + (1 - \lambda)\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}}$. Z faktu, że $\lambda \in (0, 1)$ wynika, że $\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0}$. Więc

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}.$$

Wiemy, że $\text{rank}(\boldsymbol{B}) = m$

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

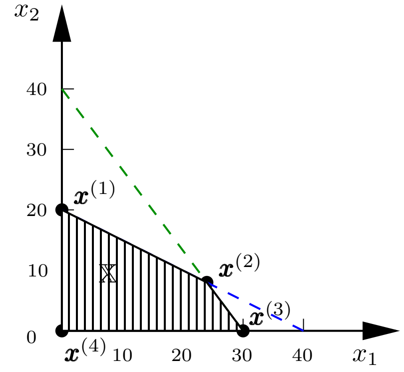
Zatem $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{B}}$. Stąd i $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0}$ dostajemy $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ - sprzeczność. □

Fakt 1. *Maksymalna liczba rozwiązań bazowych układu* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *(*$m < n$, $\text{rank}(\boldsymbol{A}) = m$*) wynosi* $\binom{n}{m}$.

Fakt 2. *Liczba rozwiązań bazowych dopuszczalnych (wierzchołków) nie może przekroczyć* $\binom{n}{m}$.

Przykład 1.

$$\mathbb{X} = \begin{cases} x_1 + \frac{3}{4}x_2 & \leqslant 30 \\ 2x_1 + 4x_2 & \leqslant 80 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \mathbb{X}' = \begin{cases} x_1 + \frac{3}{4}x_2 + x_3 & & = 30 \\ 2x_1 + 4x_2 & +x_4 & = 80 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$



$$
\begin{array}{lllllll}
\boldsymbol{x}^{(1)} & = & [0, & \mathbf{20}, & \mathbf{15}, & 0 &] \\
\boldsymbol{x}^{(2)} & = & [\mathbf{24}, & \mathbf{8}, & 0, & 0 &] \\
\boldsymbol{x}^{(3)} & = & [\mathbf{30}, & 0\ , & 0, & \mathbf{20} &] \\
\boldsymbol{x}^{(4)} & = & [\ 0, & 0, & \mathbf{30}, & \mathbf{80} &] \\
\boldsymbol{x}^{(5)} & = & [\mathbf{40}, & 0, & \mathbf{-10}, & 0 &] \\
\boldsymbol{x}^{(6)} & = & [0, & \mathbf{40}, & 0, & \mathbf{-80} &]
\end{array}
$$

Fakt 3. *Istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne takie, że każdemu wierzchołkowi w zbiorze $\mathbb{X}$ odpowiada wierzchołek w zbiorze $\mathbb{X}'$.*

Twierdzenie 2. *Jeżeli założenia 1 i 2 są spełnione, to zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ ma co najmniej jeden wierzchołek (rozwiązanie bazowe dopuszczalne).*

Dowód. Z założenia 2 mamy, że $\mathbb{X} \neq \emptyset$. Wybierzmy $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$. Uporządkujmy składowe $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_t, 0, \ldots, 0], \quad x_j > 0 \ \ j \in [t].$$

Załóżmy, że $t > 0$. W przeciwnym przypadku ($t = 0$) $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Ponieważ $\text{rank}(\boldsymbol{A}) = m$ (założenie 1), wówczas $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym (zdegenerowanym). Kontynuując ($t > 0$) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ jest postaci

$$\boldsymbol{A}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{A}_t x_t = \boldsymbol{b},$$

gdzie $\boldsymbol{A}_j$ jest j-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{A}$. Niech $r = \text{rank}([\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_t])$. Oczywiście $r \leqslant \text{rank}(\boldsymbol{A})$ oraz $r > 0$. W przeciwnym przypadku ($r = 0$) znowu $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, ponieważ $\text{rank}(\boldsymbol{A}) = m$. Rozpatrzmy dwa przypadki.

Przypadek, $r = t \leqslant m$. Ponieważ $\text{rank}(\boldsymbol{A}) = m$ z $n - t$ kolumn wybieramy $m - t$ kolumn, aby z t kolumnami tworzyły m kolumn liniowo niezależnych. Wtedy $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_t, 0, \ldots, 0]$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym. Ponadto, jeśli $t < m$ jest rozwiązaniem zdegenerowanym.

Przypadek $r < t$. Stąd podmacierz $\overline{\boldsymbol{A}}$ macierzy $\boldsymbol{A}$, $\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}$, jest nieosobliwa. Istnieje, więc $\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}$. Stąd możemy wyrazić składowe $x_1, \ldots, x_r$ wektora $\boldsymbol{x}$ za pomocą jego składowych $x_{r+1}, \ldots, x_t$. Jest oczywiste, że układ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ można zapisać (pierwsze r ograniczeń):

$$\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\overline{\boldsymbol{A}}}\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{b}',$$

gdzie $\overline{\boldsymbol{x}} = [x_1, \ldots, x_r]$, $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}} = [x_{r+1}, \ldots, x_t]$, $\boldsymbol{b}' \in \mathbb{R}^r$. Wektor postaci:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{b}' - \overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}.$$

Podstawiając $\boldsymbol{\beta} = \overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{b}'$ i $\boldsymbol{\alpha} = -\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$. Składowe $\overline{\boldsymbol{x}}$ mają postać

$$x_j = \beta_j + \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij} x_i \;\; j \in [r].$$

Konstruujemy nowe rozwiązanie dopuszczalne $\hat{\boldsymbol{x}}$, które będzie miało o co najmniej jedną składową zerową więcej niż $\boldsymbol{x}$

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta & \text{dla } j = r+1, \\ x_j & \text{dla } j > r+1, \\ \beta_j + \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij}\hat{x}_i & \text{dla } j < r+1, \end{cases}$$

gdzie $\theta \geqslant 0$, $\beta_j = x_j - \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij} x_i$. Przyjrzyjmy się składowym $\hat{x}_j$, $j \in [r]$,

$$\begin{aligned} \hat{x}_j =& \beta_j + \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij}\hat{x}_i = \beta_j + \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij} x_i - \theta\alpha_{r+1\,j} \\ =& x_j - \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij} x_i + \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij} x_i - \theta\alpha_{r+1\,j} = x_j - \theta\alpha_{r+1\,j}. \end{aligned}$$

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta & \text{dla } j = r+1, \\ x_j & \text{dla } j > r+1, \\ x_j - \theta\alpha_{r+1\,j} & \text{dla } j < r+1. \end{cases}$$

Wymuszamy $\hat{\boldsymbol{x}} \geqslant \boldsymbol{0}$. Stąd

$$\begin{cases} x_{r+1} - \theta \geqslant 0, \\ x_j - \alpha_{r+1\,j}\theta \geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{r+1} \geqslant \theta, \\ x_j \geqslant \alpha_{r+1\,j}\theta. \end{cases}$$

Wybieramy $\theta_1 = \min\left\{\frac{x_j}{\alpha_{r+1\,j}} : \alpha_{r+1\,j} > 0, j \in [r]\right\}$, $\theta = \min\{x_{r+1}, \theta_1\}$.

Jeżeli $\theta = x_{r+1}$, to $\hat{x}_{r+1} = 0$. Jeżeli $\theta = \theta_1 = \frac{x_k}{\alpha_{r+1\,k}}$, to $\hat{x}_k = 0$, $k < r+1$. Zatem $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{X}$ i ma co najmniej jedną składową zerową więcej niż $\boldsymbol{x}$. Powtarzając to rozumowanie możemy otrzymać rozwiązanie dla, którego $r = t$. Wtedy otrzymujemy pierwszy przypadek ($r = t$). $\square$

Wniosek 1. *Jeżeli założenia 1 i 2 są spełnione, to zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ ma skończoną liczbę wierzchołków.*

Pytanie Czy zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ jest domknięty i ograniczony?

Jeśli odpowiedź brzmi "tak", wówczas z twierdzenia Weierstrassa $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ przyjmuje wartość największą oraz najmniejszą w $\mathbb{X}$.

Domkniętość $\mathbb{X}$ wynika z postaci ograniczeń $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$.

Założenie 3. *Funkcja $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ jest ograniczona z dołu na zbiorze $\mathbb{X}$ (problem minimalizacji), tj. zbiór $\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}\}$ jest z dołu ograniczony.*

Lemat 1. *Niech $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ będzie rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu ($\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$). Wtedy*

$$|x_j| \leqslant m!\alpha^{m-1}\beta,$$

gdzie $\alpha = \max_{i,j}\{|a_{ij}|\}$ i $\beta = \max_i\{|b_i|\}$.

Dowód. Oszacowanie jest oczywiste, jeśli x_i nie jest zmienną bazową - wtedy $x_i = 0$.

Załóżmy, że x_i jest zmienną bazową. Wtedy

$$x_i = \mathrm{wiersz}_i(\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{b} \quad \text{jest sumą } m \text{ iloczynów.}$$

Każdy element macierzy $\boldsymbol{B}^{-1}$ jest ilorazem $\pm\det(\boldsymbol{B}_{ij})$, $\boldsymbol{B}_{ij} \in \mathbb{Z}^{(m-1)\times(m-1)}$, i $\det(\boldsymbol{B})$. Ponieważ $\boldsymbol{B} \in \mathbb{Z}^{m\times m}$, $|\det(\boldsymbol{B})| \geqslant 1$. Wiadomo

$$\det(\boldsymbol{B}_{ij}) = \sum_{\sigma\in S_{m-1}} (-1)^{\mathrm{Inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{m-1\sigma(m-1)},$$

gdzie S_{m-1} jest zbiorem wszystkich permutacji zbioru $\{1, \ldots, m-1\}$ a $\mathrm{Inv}(\sigma)$ oznacza liczbę inwersji danej permutacji σ. Widać, że $\det(\boldsymbol{B}_{ij})$ jest sumą $(m-1)!$ iloczynów $m-1$ składników. Zatem $|\det(\boldsymbol{B}_{ij})| \leqslant (m-1)!\alpha^{m-1}$. Stąd i z faktu, że $x_i = \mathrm{wiersz}_i(\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{b}$, który jest sumą m iloczynów, mamy ograniczenie $m!\alpha^{m-1}\beta$. □

Twierdzenie 3. *Jeżeli założenia 1 2 i 3 są spełnione, to problemy:*

$$\begin{array}{rl} & \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{przy warunkach} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{array} \qquad \begin{array}{rll} & \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & \\ \text{przy warunkach} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} & \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} & \\ & x_j \leqslant M & j \in [n] \end{array}$$

są równoważne, tj. ich optymalne wartości funkcji celu są sobie równe, gdzie

$$M = (m+1)!\alpha^m\beta, \alpha = \max\{|a_{ij}|, |c_j|\}, \beta = \max\{|b_i|, |z|\},$$

z jest największym dolnym ograniczeniem zbioru $\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$.

Dowód. Jest oczywiste, że $\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$ jest domknięty. Zatem istnieje $\boldsymbol{x}$ taki, że $z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$. Rozważmy teraz układ ograniczeń:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} &= z \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Układ nie jest sprzeczny. Wszystkie jego rozwiązania są optymalne.

Rozważmy dwa przypadki. Pierwszy przypadek. Macierz układu jest rzędu $m+1$. Wtedy z twierdzenia 2 układ posiada co najmniej jedno rozwiązanie bazowe dopuszczalne. Jego składowe x_j spełniają ograniczenia $x_j \leqslant M$, $j \in [n]$ (zob. lemat 1). Ograniczenia nie wpływają na rozwiązania optymalne oryginalnego problemu.

Drugi przypadek. Macierz układu jest rzędu m. Wtedy $\boldsymbol{c}^T$ można przedstawić jako kombinację liniową wierszy $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{c}^T = \sum_{i\in[m]} \gamma_i \boldsymbol{a}^T \text{ i } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \sum_{i\in[m]} \gamma_i b_i,\ \gamma_i \in \mathbb{R}.$$

Wszystkie rozwiązania $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ mają stały koszt $\sum_{i\in[m]} \gamma_i b_i$. Istnieje rozwiązanie optymalne bazowe dopuszczalne, którego składowe x_j oczywiście (zob. lemat 1) spełniają ograniczenia $x_j \leqslant M$, $j \in [n]$. $\square$

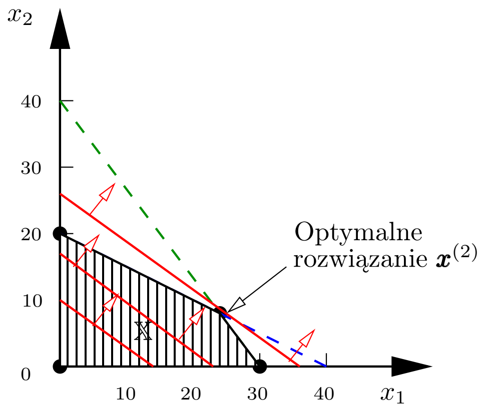
Od tego momentu możemy założyć, że

Założenie 4. *Zbiór $\mathbb{X}$ jest ograniczony.*

Geometryczna interpretacja problemu programowania liniowego

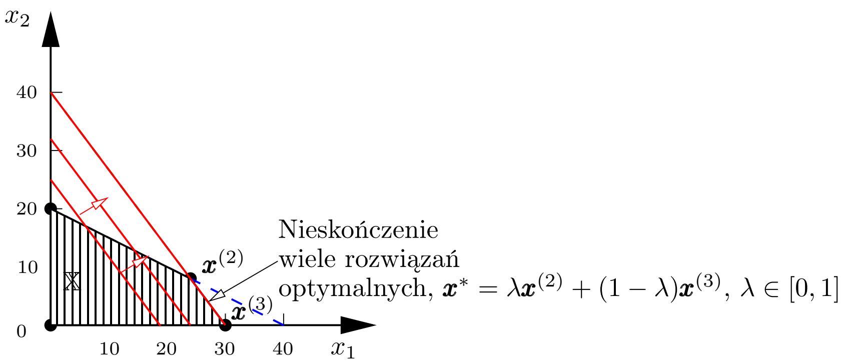
Przykład 2.

$$\begin{array}{llll} -4x_1 - 5x_2 \to \min & & & \\ x_1 & + \tfrac{3}{4}x_2 & \leqslant & 30 \\ 2x_1 & + 4x_2 & \leqslant & 80 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 & & & \end{array}$$



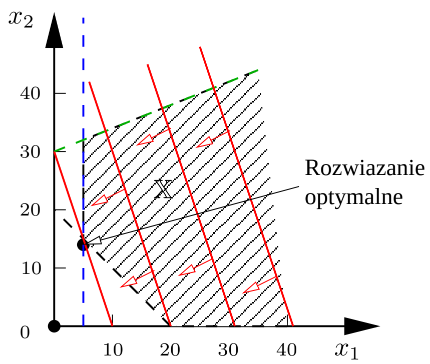
Przykład 3.

$$\begin{array}{llll} -4x_1 - 3x_2 \to \min & & & \\ x_1 & + \tfrac{3}{4}x_2 & \leqslant & 30 \\ 2x_1 & + 4x_2 & \leqslant & 80 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 & & & \end{array}$$

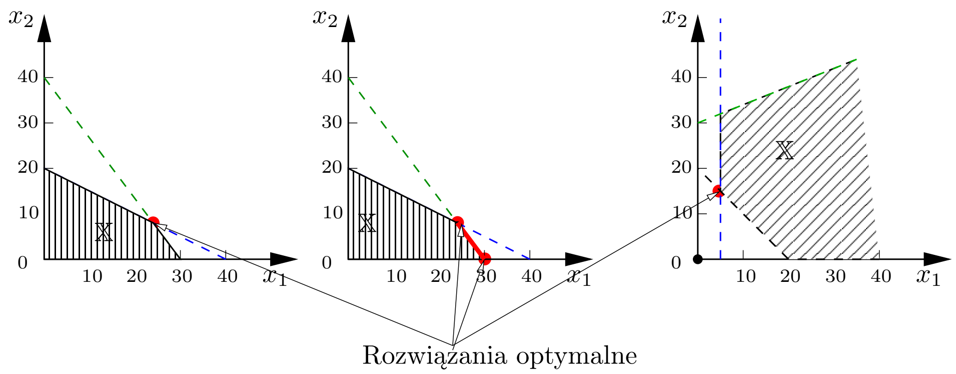


Przykład 4.

$$
\begin{array}{rcrcl}
\multicolumn{5}{l}{3x_1 + x_2 \to \min} \\
x_1 & + & x_2 & \geqslant & 20 \\
-x_1 & + & 2.5x_2 & \leqslant & 75 \\
x_1 & & & \geqslant & 5 \\
\multicolumn{5}{l}{x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0}
\end{array}
$$



Własność problemu liniowego programowania



Twierdzenie 4. *Jeżeli założenia 1, 2 i 4 są spełnione, to $\mathbf{c}^T\boldsymbol{x}$ przyjmuje wartość najmniejszą w $\mathbb{X}$ w co najmniej jednym wierzchołku tego zbioru.*

Jeżeli kilka wierzchołków $\mathbb{X}$ reprezentuje rozwiązanie optymalne, to wypukła kombinacja tych wierzchołków jest także rozwiązaniem optymalnym.

Zanim udowodnimy twierdzenie 4, podamy (bez dowodu) twierdzenie pomocnicze.

Twierdzenie 5. *Jeżeli $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ jest wielościanem wypukłym, każdy punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ można przestawić jako wypukła kombinację jego wierzchołków $\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^\ell$, tzn.*

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \hat{\boldsymbol{x}}^j,$$

gdzie $\sum_{j\in[\ell]} \lambda_j = 1$ i $\lambda_j \geqslant 0$, $j \in [\ell]$.

Inaczej

$$\mathbb{X} = \operatorname{conv}(\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^\ell),$$

$\operatorname{conv}(\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^\ell)$ *jest otoczką wypukłą punktów $\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^\ell$.*

Dowód. (twierdzenie 4) Niech $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{X}$ będzie rozwiązaniem optymalnym, tj. $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$. Z twierdzenia 5 $\boldsymbol{x}^*$ możemy przedstawić:

$$\boldsymbol{x}^* = \sum_{j\in[\ell]} \lambda_j \hat{\boldsymbol{x}}^j,\ \lambda_j \geqslant 0,\ j \in [\ell],\ \sum_{j\in[\ell]} \lambda_j = 1,$$

gdzie $\hat{\boldsymbol{x}}^j$ są wierzchołkami $\mathbb{X}$. Zatem

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}^T\left(\sum_{j\in[\ell]} \lambda_j \hat{\boldsymbol{x}}^j\right) = \sum_{j\in[\ell]} \lambda_j \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}^j.$$

Niech $\boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^r = \min_{j\in[\ell]} \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^j$. Stąd

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \sum_{j\in[\ell]} \lambda_j \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^j \geqslant \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^r \sum_{j\in[\ell]} \lambda_j = \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^r.$$

Ponieważ $\hat{\boldsymbol{x}}^r \in \mathbb{X}$, to $\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^r$. Ostatecznie dostajemy $\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^r$.

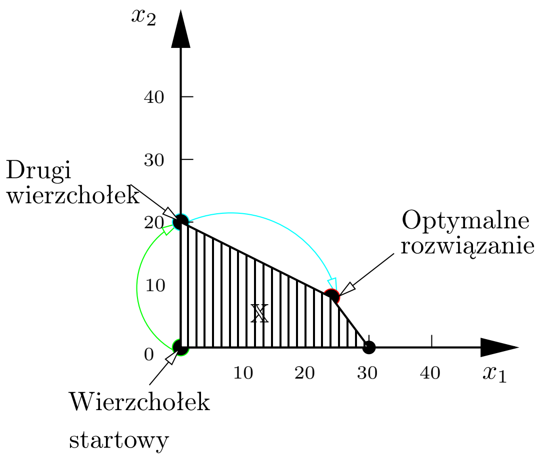
Niech $\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^k$ będą takie, że $\boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^j = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$, $j \in [k]$. Weźmy kombinację wypukłą tych wierzchołków $\boldsymbol{x}' = \sum_{j\in[k]} \lambda_j \hat{\boldsymbol{x}}^j$.

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{c}^T\left(\sum_{j\in[k]} \lambda_j \hat{\boldsymbol{x}}^j\right) = \sum_{j\in[k]} \lambda_j \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^j = \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^* \sum_{j\in[k]} \lambda_j = \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}^*.$$

□

Idea algorytmu

Spostrzeżenie 1. *Aby znaleźć rozwiązanie optymalne zadania programowania liniowego wystarczy inteligentnie przejrzeć wierzchołki zbioru rozwiązań dopuszczalnych (lub równoważnie rozwiązania bazowe dopuszczalne) i wybrać wierzchołek, w którym wartość funkcji celu jest optymalna.*



Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książek [2, 1].

Literatura

[1] Ireneusz Nykowski. *Programowanie liniowe.* PWE, Warszawa, 1980.

[2] Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz. *Combinatorial optimization: algorithms and complexity.* Dover Publications Inc., 1998.