Metody optymalizacji – laboratorium

zad. 0 Przeczytać opis języka `GNU MathProg` w celu zapoznania się z możliwościami `GNU MathProg`.

zad. 1 (Sysło, Deo, Kowalik 1993) Jednym z testów na dokładność i odporność algorytmów LP jest następujące zagadnienie

$$\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

Przy warunkach

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},$$

gdzie

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \ i,j = 1,\ldots,n,$$

$$c_i = b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}, \ i = 1,\ldots,n.$$

Rozwiązaniem tego zagadnienia jest $x_i = 1$, $i = 1,\ldots,n$. Macierz A występująca w tym teście, zwana macierzą Hilberta, powoduje złe uwarunkowanie zagadnienia nawet dla niezbyt dużych n.

Zapisać model w `GNU MathProg` i użyć `glpsol` do określenia rozmiaru problemu n jaki jeszcze można rozwiązać z dokładnością do co najmniej 2 cyfr. Drukować błąd względny $||x - \tilde{x}||_2/||x||_2$ dla danego n, gdzie $\tilde{x}$ jest rozwiązaniem obliczonym a x dokładnym.

Uogólnić metodę rozwiązania, tj. oddzielić model od danych, tak aby można było zadawać dane (n), w sekcji data lub w pliku, na podstawie, których `GNU MathProg` generowałby model i go rozwiązywał. Maksymalnie sparametryzować zapis modelu.

Jeżeli ktoś z Państwa będzie się nudził, to proszę dodatkowo zrealizować to zadanie w `julii` dla solverów `clp`, `HiGHS` i `GLPK`.

zad. 2 Pewna firma zajmuje się wypożyczaniem camperów w środkowej Europie. Zakres jej działalności obejmuje Polskę oraz sąsiednie kraje. Co jakiś czas pojawia się naturalny problem niedoboru lub nadmiaru camperów (dwa rodzaje zależne od komfortu: *Standard* i *VIP*) w miastach gdzie zlokalizowane są przedstawicielstwa firmy (punkty wypożyczania camperów). Poniżej tabela opisuje problem nadmiaru i niedoboru:

	niedobór		nadmiar	
miasta	*Standard*	*VIP*	*Standard*	*VIP*
Warszawa	–	4	14	–
Gdańsk	20	–	–	2
Szczecin	–	–	12	4
Wrocław	8	–	–	10
Kraków	–	8	10	–
Berlin	16	4	–	–
Rostok	2	–	–	4
Lipsk	3	–	–	10
Praga	–	4	10	–
Brno	9	–	–	2
Bratysława	4	–	–	8
Koszyce	4	–	–	4
Budapeszt	8	–	–	4
Razem	74	20	46	48

Należy ustalić plan przemieszczania camperów przy minimalizacji kosztów transportu, jeśli:

- koszt przemieszczenia campera *Standard* jest proporcjonalny do odległości (odległości ustalić na podstawie, np. google map),
- koszt przemieszczenia campera *VIP* jest o 15% wyższy niż campera *Standard*,
- camper *Standard* może być zastąpiony przez camper *VIP*. Natomiast camper *VIP* nie może zastąpić camper *Standard*.

Zapisać model programowania liniowego w `GNU MathProg` i rozwiązać go za pomocą `glpsol`.

Uogólnić metodę rozwiązania, tj. oddzielić model od danych. Maksymalnie sparametryzować zapis modelu.

Sprawdzić, czy założenie całkowitoliczbowości zmiennych decyzyjnych jest potrzebne.

zad. 3 Przedsiębiorstwo produkuje cztery mieszanki - produkty końcowe (patrz schemat). Dwa z tych produktów są produktami podstawowymi, powstającymi jako mieszanki trzech surowców. Poniższa tablica pokazuje, w jaki sposób surowce te mają być wymieszane, a także zawiera ceny zbytu produktów podstawowych (zakładamy, że firma może sprzedać takie ilości wszystkich produktów, jakie wytworzy, nie zmieniając cen):

Produkt	Specyfikacja	Cena za 1 kg
A	co najmniej 20% surowca 1 co najmniej 40% surowca 2 nie więcej niż 10% surowca 3	3$
B	co najmniej 10% surowca 1 nie więcej niż 30% surowca 3	2.5$

W celu zagwarantowania terminowych dostaw surowców przedsiębiorstwo zgodziło się na to, że w każdym wypadku w rozpatrywanym okresie planowania zakupi pewne minimalne ilości tych surowców. Natomiast fizyczne uwarunkowania urządzeń produkcyjnych ograniczają z góry ilość każdego z surowców, jaką przedsiębiorstwo może w tym okresie przetworzyć. Oba rodzaje ograniczeń, jak i jednostkowe ceny surowców podane są w poniższej tabeli:

Surowiec	Minimum (kg)	Maksimum (kg)	Koszt za 1 kg ($)
1	2000	6000	2.1
2	3000	5000	1.6
3	4000	7000	1.0

Z samej natury procesu produkcji wynika fakt, że tylko pewna część każdego z surowców użytych do produkcji produktów podstawowych wchodzi bezpośrednio do tych produktów. Reszta (odpady), których ilość wyraża się każdorazowo poprzez znany współczynnik strat (patrz poniższa tabela), może być albo użyta ponownie - do produkcji produktów **C** i **D** - albo zniszczona na koszt firmy.

	Produkt	
Surowiec	**A**	**B**
1	0.1	0.2
2	0.2	0.2
3	0.4	0.5

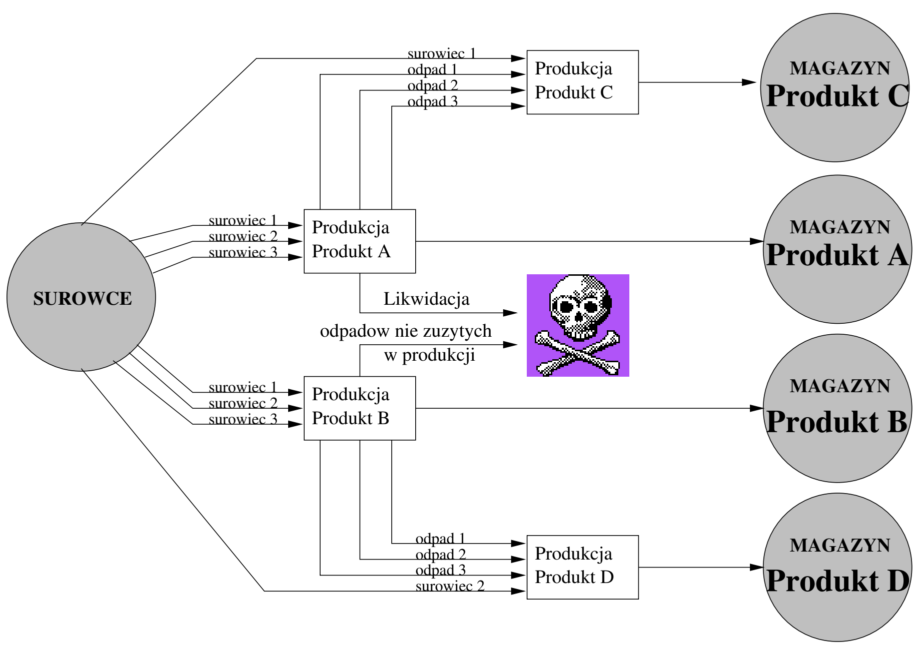
Drugorzędny produkt **C** otrzymuje się poprzez wymieszanie dowolnych ilości odpadów z surowców 1, 2, 3 otrzymanych przy wyrobie produktu **A** z oryginalnym surowcem 1, przy czym ten ostatni musi stanowić (wagowo) dokladnie 20% mieszanki. Podobnie, drugorzędny produkt **D** otrzymuje się poprzez wymieszanie dowolnych ilości odpadów z surowców 1, 2, 3 otrzymanych przy wyrobie produktu **B** z oryginalnym surowcem 2, przy czym ten ostatni musi stanowić (wagowo) dokładnie 30% mieszanki. Przy produkcji produktów drugorzędnych nie powstają żadne odpady. Ceny rynkowe (za 1 kg) produktów **C** i **D** wynoszą odpowiednio 0.6$ i 0.5$.

Poniższa tabela zawiera koszty zniszczenia odpadów nie użytych do produkcji produktów drugorzędnych. Ceny te są różne w zależności od pochodzenia odpadów (kombinacja surowiec/produkt podstawowy), ponieważ odpady z różnych procesów produkcyjnych mają różne własności chemiczne:

	Produkt	
	A	**B**
Surowiec	($/kg)	
1	0.1	0.05
2	0.1	0.05
3	0.2	0.40

Przedsiębiorstwo chce znaleźć odpowiedź na następujące pytania:

- Ile zakupić surowców 1, 2 i 3?
- Jaką część każdego z surowców przeznaczyć do produkcji jakiego produktu (**A**, **B**, **C** i **D**)?
- Jaką część odpadów z produkcji produktów **A** i **B** zniszczyć, a jaką przeznaczyć do produkcji produktów drugorzędnych?



Zapisać model programowania liniowego w `GNU MathProg` i rozwiązać go za pomocą `glpsol`. Tutaj można napisać model programowania liniowego pod konkretne dane z zadania - nie trzeba oddzielać danych od modelu.

zad. 4 Student uczęszcza na pięć następujących przedmiotów: algebrę, analizę, fizykę, chemię minerałów i chemię organiczną. Ze względu na dużą liczbę studentów, do każdego z tych przedmiotów zorganizowano cztery grupy ćwiczeniowe. W poniższej tabeli podane są godziny zajęć każdej z tych grup:

	Algebra	Analiza	Fizyka	Chemia min.	Chemia org.
I	Pn. 13-15	Pn. 13-15	Wt. 8-11	Pn. 8-10	Pn. 9-10:30
II	Wt. 10-12	Wt. 10-12	Wt. 10-13	Pn. 8-10	Pn. 10:30-12
III	Śr. 10-12	Śr. 11-13	Cz. 15-18	Cz. 13-15	Pt. 11-12:30
IV	Śr. 11-13	Cz. 8-10	Cz. 17-20	Pt. 13-15	Pt. 13-14:30

Dla każdego z przedmiotów student wyraził swoje preferencje wobec poszczególnych grup, przyporządkując każdej z nich ocenę między 0 a 10 punktów. Ocena ta bierze pod uwagę godzinę odbywania się ćwiczeń oraz opinię, jaką cieszy się prowadzący je asystent. Preferencje te podane są w poniższej tabeli:

	Algebra	Analiza	Fizyka	Chemia min.	Chemia org.
I	5	4	3	10	0
II	4	4	5	10	5
III	10	5	7	7	3
IV	5	6	8	5	4

Student pragnie w ten sposób zapisać się na zajęcia z pięciu obowiązujących go przedmiotów, by zmaksymalizować sumę punktów preferencyjnych. Chce on przy tym respektować trzy następujące ograniczenia:

- nie zapisywać się na więcej niż cztery godziny ćwiczeń dziennie,
- mieć codziennie między 12 a 14 jedną godzinę wolną (by zjeść obiad w stołówce, która otwarta jest tylko w tych godzinach),
- móc trenować przynajmniej raz w tygodniu swoją ulubioną dyscyplinę sportu. Treningi odbywają się: w poniedziałek od 13 do 15 oraz w środę od 11 do 13 i od 13 do 15 (może więc trenować raz, dwa lub trzy razy w tygodniu).

1. Zapisać model programowania calkowitoliczbowego w `GNU MathProg` i rozwiązać go za pomocą `glpsol`.
2. Czy istnieje taki rozkład zajęć, w którym wszystkie ćwiczenia z przedmiotów obowiązkowych byłyby zgrupowane w trzech dniach - w poniedziałek, wtorek i czwartek - oraz wszystkie odpowiadałyby preferencjom nie mniejszym niż 5?

Tutaj można napisać model programowania calkowitoliczbowego pod konkretne dane z zadania - nie trzeba oddzielać danych od modelu.

Rozwiązania problemów przedstawić w sprawozdaniu, plik pdf, które powinno zawierać:

1. modele
   (a) definicje zmiennych decyzyjnych (opis, jednostki),
   (b) ograniczenia wraz z interpretacją (nie umieszczać źródeł modelu),
   (c) funkcje celu wraz z interpretacją,
2. wyniki oraz ich interpretację.

Model, zmienne w sprawozdaniu zapisujemy matematycznie (nie w `GNU MathProg`) - zob. na stronie `przykład opisu modelu`.

Do sprawozdania należy dołączyć pliki w `GNU MathProg` (`*.mod`, `*.dat`) Pliki powinny być skomentowane: **imię i nazwisko** autora, komentarze zmiennych, zaetykietowane ograniczenia oraz komentarz ograniczeń.

Uwaga: Za zadania 1, 2, 3 (zadania obowiązkowe) można otrzymać co najwyżej ocenę dobrą.